La loglangue facile en quinze leçons

Marcel Crabbé

Leçon 0.

Origine de la loglangue

La loglangue ou langue de la logique s'est progressivement constituée en raison de l'incapacité des langues naturelles, dont le français, à exprimer clairement les structures et les relations logiques.

Des incapacités analogues dans d'autres domaines ont nécessité la création de langues fragmentaires qui, mélangées aux langues naturelles, ont permis à des sciences de faire de considérables progrès. C'est le cas pour les formules utilisées en mathématique, physique, chimie et même en linguistique. Au lieu de dire en français que le produit de la somme de deux nombres par leur différence est identique à la différence des carrés de ces nombres, il est parfois plus commode et plus fécond d'écrire $(n+m)(n-m) = n^2 - m^2$.

Leibniz (1646–1716) fut le premier semble-t-il qui eut l'idée d'utiliser un formulaire, non plus seulement pour exprimer des notions ou des vérités propres à une science particulière, mais pour toute vérité ou fausseté que l'on pourrait concevoir. Ce projet ne fut mené à terme qu'avec Gottlob Frege (1848–1925) qui créa une véritable conceptographie (Begriffschrift). Depuis Frege, cette langue s'est considérablement modifiée et enrichie. La modification la plus visible en est la notation. Frege utilisait une notation à deux dimensions. Son écriture, qui ressemble à des idéogrammes, n'a pas été conservée. Elle fut presque immédiatement remplacée par une écriture linéaire. Les enrichissements ont, pour leur part, rendu possible une analyse de plus en plus fine de certains jugements qui paraissaient rebelles à toute formalisation. C'est cette langue frégéenne modifiée, ou langage des prédicats du premier ordre, qui sera l'objet de ce petit manuel.

Nous conseillons vivement à l'élève de ne pas s'attarder sur cette leçon initiale, en y sautant ce qu'il ne comprend pas en première lecture, mais d'y revenir régulièrement au cours de son apprentissage.

Comment parler de la langue

Dans les cours de langue, il est nécessaire de pouvoir parler des mots et des expressions de la langue. Pour ce faire il est utile de disposer d'expressions qui désignent des expressions. On peut former de telles expressions en utilisant les guillemets simples. Les guillemets simples sont au nombre de deux : le guillemet ouvrant et le guillement fermant. Le guillemet fermant est une virgule surélevée et le guillement ouvrant est le guillemet fermant mis sens dessus dessous. Une suite composée du guillemet ouvrant, d'une expression E et d'un guillemet fermant est une expression désignant l'expression E ; l'expression E est ainsi mise entre guillemets simples.

Donc 'Rome', qui a quatre lettres, n'est pas une ville, alors que Rome en est une. Chacun sait également que π n'est pas une lettre grecque, mais le nombre bien connu désigné par 'π'. Plus curieusement, ' n'est pas un guillemet simple, mais ' ' ' en est un. Enfin 'E' n'est pas en général l'expression E mise entre guillemets, mais la lettre 'E' : si l'expression E est 'Rome', E entre guillemets a six caractères alors que 'E' n'en a qu'un.

Les guillemets permettent donc de parler dans la langue des expressions de la langue. D'autres procédés peuvent également être utilisés, comme la mise en italique ou les guillemets ordinaires que sont ' « ' et ' » '. Cependant, l'avantage des guillemets simples est leur uniformité, et de plus ils n'ont pas d'autre usage. Notons qu'il n'est pas nécessaire d'utiliser l'une ou l'autre de ces méthodes quand le contexte indique clairement si on parle d'un mot ou d'une chose. Ainsi, il est évident que la phrase 'Rome est un mot de quatre lettres' doit se lire le plus souvent ' 'Rome' est un mot de quatre lettres'.

Points communs avec les langues naturelles

La loglangue comprend un ensemble de lettres formant l'alphabet qui permettent de construire des expressions. Les lettres ou symboles sont groupés en sortes : les symboles propositionnels, prédicatifs et fonctionnels, les constantes, les variables, les symboles logiques et les parenthèses, seuls signes de ponctuation.

Toute suite finie de lettres de l'alphabet est une expression. Mais toute expression n'est pas grammaticale. Les expressions grammaticales sont de différentes catégories : les termes, les énoncés simples et complexes.

Elle est vivante, en ce sens qu'elle évolue en s'adjoignant de nouveaux mots et en se débarrassant d'expressions désuètes et d'archaïsmes.

Différences avec les langues naturelles

Cette langue est écrite avant d'être parlée.

Elle ne présente pas de degrés de grammaticalité, toute expression est pleinement grammaticale ou ne l'est pas du tout.

L'apprentissage ne suppose pas l'assimilation d'un lexique. La signification du vocabulaire utilisé peut varier d'un texte, voire d'une phrase à l'autre.

On observe aussi de grandes variantes dans l'écriture et la prononciation. On peut ainsi considérer qu'il y a plusieurs dialectes, voire des loglangues différentes. Cependant le passage de l'une à l'autre est quasi immédiat.

On n'a découvert à ce jour aucun individu dont la loglangue serait la langue maternelle.

Différences de la traduction ici exposée et de celle qui a cours entre idiomes naturels

Un énoncé d'une langue naturelle comme le français possède une composante grammaticale, une composante sémantique (un sens), une composante rhétorique ou pragmatique (les présupposés et sous-entendus possibles) et une composante poétique (les effets de l'écriture et du son). Ces différentes composantes sont précisément ce qu'une traduction dans une autre langue ou dans la même, maintient ou modifie. Lorsque les précieuses de Molière ordonnent à leur serviteur 'voiturez-nous ici les commodités de la conversation', on peut traduire cela par 'apportez-nous les sièges', et on conserve ainsi plus ou moins les composantes grammaticale et sémantique, mais on perd les effets pragmatiques et poétiques. Quand on traduit l'italien 'traduttore, traditore' en 'une traduction parfaite est impossible' on préserve sans doute la composante sémantique, mais on altère les autres. Quand on traduit cela en 'traducteur, trouducteur' (Céline), on modifie beaucoup moins les composantes poétique et rhétorique que les deux autres.

L'analyse logique dégage la composante sémantique, certes pas le sens complet mais la structure du sens, appelée structure logique. Nous considérons une analyse logique d'une phrase française comme une traduction de cette phrase dans la (ou une) loglangue. La loglangue est ainsi faite qu'elle efface le plus possible les éléments grammaticaux, rhétoriques et poétiques de la langue analysée.

Les phrases françaises peuvent s'analyser de diverses manières. D'abord en profondeur. Ensuite, pour une même profondeur en largeur. La profondeur de l'analyse est une notion relative : une analyse est plus profonde qu'une autre si elle traduit davantage de distinctions présentes dans la phrase. La largeur se réfère à la manière de grouper les composantes qui ont été ainsi distinguées.

Nous verrons que la traduction d'une phrase comme 'Antigone aime son frère', peut de plus en plus profondément faire apparaître successivement qu'il s'agit d'une phrase non analysée ; d'une phrase analysée comme mise en rapport des entités inanalysées que sont « Antigone » et « aime son frère » ; d'une relation entre

« Antigone », « son frère » et « l'amour », d'une relation entre « Antigone », « son », « frère », « le », « amour » et le moment présent etc. Dès qu'on a atteint la profondeur où « Antigone » et « son frère » apparaissent distinctement, on peut encore, en largeur cette fois, choisir de relier « son frère » à « Antigone » ou non.

La plupart des phrases françaises, sinon toutes, sont donc envisagées comme ambiguës, tant verticalement qu'horizontalement. Une analyse est pour ainsi dire une levée de l'ambiguïté, une lecture logique. La diversité des analyses se justifie en fin de compte par le contexte dans lequel la phrase est utilisée ou doit l'être, notamment les raisonnements dans lesquels elle figurent. Il n'y a dès lors pas de sens à distinguer dans l'absolu une traduction qui serait ou la meilleure ou l'authentique.

Prononciation

Les loglangophones (ou loglangographes) s'expriment et communiquent généralement par écrit, ils utilisent pour cela des feuilles de papier ou assez souvent des tableaux et des craies. Des expressions courtes peuvent cependant être lues à voix haute ou directement énoncées. Voici quelques principes de prononciation adoptés par les francophones.

Toutes les lettres ordinaires se prononcent. Elles se prononcent par leurs noms : a, baie, sait, dé, et, effe, j'ai, hache, y, git, cas, elle, aime, haine, eau, paie, cul, air, esse, taie, hue, vais, double vais, ixe, y grec, zette. Les différences d'intonation n'affectent pas la compréhension.

Ainsi l'expression *sac* ne se prononce pas comme dans 'sac-à-dos' mais comme 'est-ce assez'.

Les signes diacritiques — accents et indices — se prononcent distinctement en les détachant des lettres et en commençant par le bas : $s^{8}_{1000}ac$, est-ce mille huit assez ; $g^{1}c_{4}$, j'ai un C4.

Les lettres spéciales se prononcent comme suit : la lettre $\neg$ se prononce 'non' ; $\wedge$ se prononce 'et' ; $\vee$ se prononce 'ou' ; $\rightarrow$ se prononce 'implique' ; $\leftrightarrow$ se prononce 'équivaut à' ; $\forall$ se prononce 'pour tout' ; $\exists$ se prononce 'il existe un' ; $=$ se prononce 'égale'. Les parenthèses se marquent à l'oral par une légère pause.

$(s \rightarrow (r \vee p))$: esse implique, air ou paie.

$\exists x\, s^{1}x \vee sz$: il existe un nixe est-ce un nixe ou est-ce Zette.

$(p^{7}_{20}da_{8}abgac \wedge \neg r)$: paie vingt-sept dés à huit abbés j'ai assez, et, non erre'.

Leçon 1. Il pleut

Vocabulaire

$\boldsymbol{p}$ Il pleut. $\boldsymbol{q}$ Il tonne. $\boldsymbol{r}$ Il fait beau. $\boldsymbol{s}$ Il est midi.

Version

1. $\boldsymbol{p}$	Il pleut.
2. $\boldsymbol{\neg p}$	Il ne pleut pas.
3. $\boldsymbol{r}$	Il fait beau.
4. $\boldsymbol{\neg r}$	Il ne fait pas beau.
5. $\boldsymbol{\neg q}$	Il ne tonne pas.
6. $\boldsymbol{\neg s}$	Il n'est pas midi.
7. $\boldsymbol{(r \wedge s)}$	Il fait beau et il est midi.
8. $\boldsymbol{(q \vee p)}$	Il tonne ou il pleut.
9. $\boldsymbol{(s \leftrightarrow q)}$	Il est midi si et seulement s'il tonne.
10. $\boldsymbol{(\neg q \wedge \neg r)}$	Il ne tonne pas et il ne fait pas beau.

Explications

Les lettres p, q, r et s sont des **symboles propositionnels**, leurs traductions sont des phrases déclaratives du français, comme 'l'hiver est dur', 'c'est la pause café', mais pas 'taisez-vous !', 'où est-il passé ?'. Les symboles propositionnels sont des énoncés de base de la loglangue.

Un **énoncé** est une expression susceptible d'être vraie ou fausse. Il est utile d'introduire les valeurs de vérité que sont *le* vrai et *le* faux et de considérer qu'un énoncé peut recevoir une et seule de ces valeurs. Selon que sa valeur est le vrai ou le faux, un énoncé sera réputé vrai ou faux.

La **négation** d'un énoncé se forme en le faisant précéder du symbole $\neg$. Une négation $\neg A$ est vraie si l'énoncé A n'est pas vrai et fausse s'il est vrai. $\neg A$ n'a donc jamais la même valeur de vérité que A.

Les énoncés $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ et $(A \leftrightarrow B)$ sont respectivement la **conjonction**, la **disjonction** et l'**équivalence** de A et de B.

Une conjonction d'énoncés est vraie si et seulement si ces énoncés sont tous vrais. Une disjonction d'énoncés est vraie si et seulement si l'un au moins de ces énoncés est vrai. Enfin, une équivalence d'énoncés est vraie si et seulement si ces énoncés sont tous vrais ou tous faux : la valeur de vérité d'une équivalence est le vrai lorsque ces énoncés ont une même valeur, sa valeur est le faux lorsque ces valeurs sont différentes.

Thème

1. Il pleut et il ne pleut pas.	$(\boldsymbol{p} \wedge \neg \boldsymbol{p})$
2. Ce n'est pas en même temps qu'il pleut et qu'il tonne.	$\neg(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q})$
3. Il tonne ou il ne fait pas beau.	$(\boldsymbol{q} \vee \neg \boldsymbol{r})$
4. Ou bien il tonne ou bien il fait beau.	▲ $((\boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{r}) \wedge \neg(\boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{r}))$ ▲ $((\boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{r}) \wedge (\neg \boldsymbol{q} \vee \neg \boldsymbol{r}))$ ▲ $(\boldsymbol{q} \leftrightarrow \neg \boldsymbol{r})$
5. Il tonne si et seulement si il ne fait pas beau.	▲ $(\boldsymbol{q} \leftrightarrow \neg \boldsymbol{r})$ ▲ $((\boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{r}) \wedge \neg(\boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{r}))$
6. Il n'est pas vrai qu'il tonne si et seulement si il fait beau.	▲ $\neg(\boldsymbol{q} \leftrightarrow \boldsymbol{r})$ ▲ $((\boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{r}) \wedge \neg(\boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{r}))$
7. Il est midi, il pleut et il ne fait pas beau.	$((\boldsymbol{s} \wedge \boldsymbol{p}) \wedge \neg \boldsymbol{r})$
8. S'il fait beau, il est midi et il tonne et s'il est midi et qu'il tonne, il fait beau.	$(\boldsymbol{r} \leftrightarrow (\boldsymbol{s} \wedge \boldsymbol{q}))$
9. Il pleut ou il tonne et il n'est pas midi.	▲ $((\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \wedge \neg \boldsymbol{s})$ ▲ $(\boldsymbol{p} \vee (\boldsymbol{q} \wedge \neg \boldsymbol{s}))$
10. S'il ne tonne pas ou s'il ne fait pas beau, alors il fait beau et il est midi, et inversement	$((\neg \boldsymbol{q} \vee \neg \boldsymbol{r}) \leftrightarrow (\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{s}))$

Remarques

On traduira une négation en français soit en plaçant une expression comme 'il ne se trouve pas que', 'on n'a pas que', 'il n'est pas vrai que' devant la traduction de l'énoncé nié, soit en introduisant 'ne...pas' à l'intérieur de celui-ci.

Une conjonction se traduit généralement à l'aide du mot 'et', une disjonction à l'aide de 'ou' ou de 'et/ou', et une équivalence avec 'si et seulement si' ou 'équivaut à'. Il est d'usage en français écrit d'abréger 'si et seulement si' en 'ssi'.

Pour déterminer si $\neg A$ est vrai ou faux, il suffit de déterminer si A est vrai ou faux. Donc, la valeur de vérité de $\neg A$ est fonction, au sens mathématique, de la valeur de A.

$(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ et $(A \leftrightarrow B)$ sont également des fonctions de vérité, car connaissant les valeurs de A et de B, on peut « calculer » les valeurs de $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ et de $(A \leftrightarrow B)$.

Pour cette raison, le négateur $\neg$, le conjoncteur $\wedge$, le disjoncteur $\vee$ et l'équivaluateur $\leftrightarrow$ sont appelés foncteurs de vérité.

Les loglangues ne contiennent que rarement un symbole qui traduit le disjoncteur dit exclusif : « ou bien...ou bien... ». Un tel symbole serait un foncteur de vérité, car ou bien A ou bien B n'est vrai que si l'un des énoncés est vrai et pas l'autre. L'absence de ce foncteur n'est cependant pas une véritable lacune, car ou bien A ou bien B peut se rendre par $((A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B))$ ou, plus brièvement, $\neg(A \leftrightarrow B)$.

D'autres foncteurs usuels peuvent se formuler à l'aide de ceux qu'on a introduit. ni A ni B, par exemple, s'écrit $(\neg A \wedge \neg B)$.

Leçon 2. Paul est russe

Vocabulaire

$\boldsymbol{a}$	Paul	$\boldsymbol{p}^1$	russe	$\boldsymbol{r}^1$	fille
$\boldsymbol{b}$	Sophie	$\boldsymbol{q}^1$	belge	$\boldsymbol{s}^1$	garçon

Version

1. $\boldsymbol{p^1 a}$	Paul est russe.
2. $\boldsymbol{\neg p^1 a}$	Paul n'est pas russe.
3. $\boldsymbol{q^1 b}$	Sophie est belge.
4. $\boldsymbol{\neg q^1 b}$	Sophie n'est pas belge.
5. $\boldsymbol{r^1 b}$	Sophie est une fille.
6. $\boldsymbol{\neg r^1 b}$	Sophie n'est pas une fille.
7. $\boldsymbol{s^1 a}$	Paul est un garcon.
8. $\boldsymbol{(q^1 b \wedge p^1 a)}$	Sophie est belge et Paul est russe.
9. $\boldsymbol{(\neg q^1 a \vee p^1 b)}$	Paul n'est pas belge ou Sophie est russe.
10. $\boldsymbol{(q^1 b \rightarrow p^1 a)}$	Si Sophie est belge, Paul est russe.

Explications

Les lettres p^1, q^1, r^1 et s^1 sont des **symboles prédicatifs** unaires. Elles désignent des propriétés. Les lettres a et b sont des **constantes**. Elles désignent des objets.

Les notions d'**objet** et de **propriété** sont si fondamentales qu'il est sans doute impossible de les définir. On peut néanmoins indiquer ce qu'elles visent.

Un objet est une entité considérée comme autonome. Parmi les objets, on peut dénombrer, entre autres, les objets physiques ou vivants (les cailloux, les choux, les chats, les Chinois), psychiques (les maux de dents, les chagrins d'amour, les émotions profondes) et idéaux (les nombres, les figures géométriques, les valeurs de vérité).

Une propriété est une entité qui peut s'attacher à un objet (lourd, douloureux, pair).

Puisque Paul est un objet et « russe » une propriété, la phrase 'Paul est russe' exprime en français que la propriété « russe » s'applique à l'objet Paul, ou que Paul vérifie la propriété « russe ».

On exprime cela dans la loglangue, en faisant précéder la constante, qui désigne l'objet, du symbole prédicatif, qui désigne la propriété. p^1a dit que l'objet a vérifie la propriété p^1.

L'énoncé $(A \to B)$ est l'**implication** de A et de B. Il signifie que si A est vrai, alors B est vrai ou, plus sobrement, si A, B. Examinons cette définition de plus près.

Supposons que $(A \to B)$ soit vrai. Si A est vrai, B est évidemment vrai et donc, dans ce cas, A n'est pas vrai ou B est vrai. Et, d'autre part, si A n'est pas vrai, alors également A n'est pas vrai ou B est vrai. Or l'énoncé A est vrai ou non. Donc, si $(A \to B)$ est vrai, A n'est pas vrai ou B est vrai.

Supposons maintenant que A ne soit pas vrai ou que B soit vrai. Alors $(A \to B)$ est vrai. En effet, deux cas peuvent se présenter : A non vrai ou B vrai. Si A est vrai, on exclut le premier cas et il reste le second, à savoir que B est vrai. Donc, si A n'est pas vrai ou si B est vrai, $(A \to B)$ est vrai.

En résumé, $(A \to B)$ est vrai ssi A n'est pas vrai ou B est vrai. Par conséquent l'implicateur $\to$ est un foncteur de vérité.

Thème

1. Paul n'est ni russe ni belge.	$\boldsymbol{\neg p^1 a \land \neg q^1 a}$
2. Paul est un garcon russe ou il est belge.	$\boldsymbol{(s^1 a \land p^1 a) \lor q^1 a}$
3. Paul est un garcon et il est russe ou belge.	$\boldsymbol{s^1 a \land (p^1 a \lor q^1 a)}$
4. Si Sophie est russe, Paul n'est pas belge.	$\boldsymbol{p^1 b \to \neg q^1 a}$
5. Si Sophie n'est pas russe, Paul est une fille belge.	$\boldsymbol{\neg p^1 b \to (r^1 a \land q^1 a)}$
6. Si Sophie est russe, alors Paul n'est pas une fille, mais il est belge.	$\boldsymbol{p^1 b \to (\neg r^1 a \land q^1 a)}$
7. Si Sophie n'est pas une fille et si Paul est belge, alors c'est un garcon.	$\boldsymbol{(\neg r^1 b \land q^1 a) \to s^1 a}$
8. Si Sophie est russe, alors elle n'est pas un garcon ou Paul est une fille.	$\boldsymbol{p^1 b \to (\neg s^1 b \lor r^1 a)}$
9. Si Sophie est russe, alors si Paul est belge, il n'est pas une fille.	$\boldsymbol{p^1 b \to (q^1 a \to \neg r^1 a)}$
10. Qu'elle soit garcon ou fille, Sophie n'est ni russe ni belge.	$\boldsymbol{(s^1 b \lor r^1 b) \to (\neg p^1 b \land \neg q^1 b)}$

Remarques

On aura remarqué que nous avons omis les parenthèses extérieures dans l'écriture des énoncés de la loglangue. Nous continuerons cette pratique courante lorsqu'elle ne cause pas d'ambiguïté.

La traduction française d'un symbole prédicatif unaire est assez souvent une expression, comme un nom commun ou un adjectif, désignant une propriété. Les constantes sont traduites par des expressions désignant des objets, noms propres ou périphrases (Olivier, le professeur de morale).

La liaison d'une propriété et d'un objet peut être rendue par une phrase de la forme « sujet est attribut », où « sujet » est un nom d'objet et « attribut » un nom de propriété : 'ce caillou est lourd', 'mon mal de dents est douloureux', 'le nombre 2 est pair', 'le nombre 2 est lourd', 'mon mal de dents est pair'...

Puisque $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \leftrightarrow B)$ et $(A \rightarrow B)$ sont des fonctions de vérité, leur valeur de vérité ne peut dépendre que de la valeur de vérité de A et de B, et pas d'autre chose comme d'un lien éventuel entre A et B, ou de la valeur de vérité que A ou B ont ou auraient eu à d'autres moments ou en d'autres lieux. Des (traductions de) phrases comme 'Descartes est chinois ou la terre est ronde', 'Descartes est chinois ssi la terre n'est pas ronde', 'si Descartes est chinois, la terre est ronde', 'si Descartes est chinois, la terre n'est pas ronde' sont toutes vraies. Et 'Descartes est chinois et la terre est ronde', 'Descartes est chinois ssi la terre est ronde' et 'si Descartes n'est pas chinois, la terre n'est pas ronde' sont fausses.

L'implication $A \rightarrow B$ est formée de son **antécédent** A et de son **conséquent** B. Une implication est vraie lorsque son antécédent est faux ou son conséquent vrai.

À ne pas y regarder de près ceci peut sembler paradoxal, car l'implication est vraie dès que son antécédent est faux quelle que soit la valeur du conséquent et elle est vraie dès que son conséquent est vrai indépendamment de l'antécédent. Les adages latins médiévaux, pour une fois, ne mentaient pas : « e falso (sequitur) quodlibet », « e vero, verum », « du faux suit ce qu'on veut », « du vrai, le vrai ». Donc, l'une au moins des deux phrases suivantes est vraie : 'si je suis à Paris, je suis en Belgique', 'si je suis à Bruxelles, je suis en France'.

Notons qu'une implication est fausse ssi son antécédent est vrai et son conséquent faux.

Leçon 3. Paul dort

Vocabulaire

$\boldsymbol{a}$	Paul	$\boldsymbol{p^1}$	mangeant	$\boldsymbol{r^1}$	tonnant
$\boldsymbol{b}$	Sophie	$\boldsymbol{q^1}$	dormant	$\boldsymbol{p}$	Il tonne.

Version

1. $\boldsymbol{p^1 b}$	Sophie mange.
2. $\boldsymbol{q^1 b}$	Sophie dort.
3. $\boldsymbol{r^1 a}$	Paul tonne.
4. $\boldsymbol{p}$	Il tonne.
5. $\boldsymbol{\neg q^1 a}$	Paul ne dort pas.
6. $\boldsymbol{\neg\neg q^1 a}$	Il n'est pas vrai que Paul ne dort pas.
7. $\boldsymbol{p^1 a \wedge \neg q^1 b}$	Paul mange et Sophie ne dort pas.
8. $\boldsymbol{r^1 a \rightarrow \neg q^1 b}$	Si Paul tonne, Sophie ne dort pas.
9. $\boldsymbol{p \rightarrow \neg q^1 b}$	S'il tonne, Sophie ne dort pas.
10. $\boldsymbol{q^1 b \vee p}$	Sophie dort ou il tonne.

Explications

Le vocabulaire de cette leçon ne s'accorde pas avec celui des leçons précédentes. p^1 par exemple est traduit ici par 'mangeant' et non plus par 'russe'. C'est une caractéristique de la loglangue. Les symboles peuvent être interprétés de diverses façons. C'est également, dans une mesure moindre, le cas en français où 'Descartes' nomme un philosophe, une ville, un lycée ou un chat. Mais dans la loglangue cette liberté d'interprétation est quasi totale, elle est seulement restreinte par la nécessité qu'un symbole propositionnel est toujours un énoncé, qu'une constante désigne un objet et un symbole prédicatif, une propriété.

Les symboles de la loglangue, que nous avons rencontrés, si on omet ces signes de ponctuation que sont les parenthèses, peuvent se répartir en deux grands groupes. D'une part, les mots non logiques, à savoir les symboles propositionnels, prédicatifs et les constantes, qui sont interprétables assez librement. D'autre part, les symboles $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, dont l'interprétation est toujours la même, et qui sont, pour cette raison, appelés connecteurs ou constantes logiques. Dans la leçon suivante, nous rencontrerons une nouvelle espèce de mots.

Thème

1. Paul dort en mangeant.	$\boldsymbol{qa \wedge pa}$
2. Soutenir qu'il n'est pas exact que Paul ne mange pas, serait erroné.	$\neg\neg\neg \boldsymbol{pa}$
3. Si Paul dort, Sophie n'est pas sans manger.	$\boldsymbol{qa} \rightarrow \neg\neg \boldsymbol{pb}$
4. S'il n'est pas vrai que Paul ne mange pas, alors Sophie dort.	$\neg\neg \boldsymbol{pa} \rightarrow \boldsymbol{qb}$
5. Que Paul mange et que Sophie ne dorme pas, ce n'est pas exact.	$\neg(\boldsymbol{pa} \wedge \neg \boldsymbol{qb})$
6. Paul est en train de manger ou Sophie ne dort pas? Ni l'un ni l'autre.	$\neg(\boldsymbol{pa} \vee \neg \boldsymbol{qb})$
7. Si quand Paul mange, Sophie dort, il tonne.	▴ $(\boldsymbol{pa} \rightarrow \boldsymbol{qb}) \rightarrow \boldsymbol{ra}$ ▴ $(\boldsymbol{pa} \rightarrow \boldsymbol{qb}) \rightarrow \boldsymbol{p}$
8. Si quand il mange, Sophie dort, alors Paul tonne.	$(\boldsymbol{pa} \rightarrow \boldsymbol{qb}) \rightarrow \boldsymbol{ra}$
9. Si Paul mange et que Sophie dort, alors Paul tonne et il tonne.	$(\boldsymbol{pa} \wedge \boldsymbol{qb}) \rightarrow (\boldsymbol{ra} \wedge \boldsymbol{p})$
10. Si, à supposer que Paul mange, le fait que Sophie dorme implique qu'il tonne, alors si elle mange aussi, il dort.	▴ $(\boldsymbol{pa} \rightarrow (\boldsymbol{qb} \rightarrow \boldsymbol{ra})) \rightarrow (\boldsymbol{pb} \rightarrow \boldsymbol{qa})$ ▴ $(\boldsymbol{pa} \rightarrow (\boldsymbol{qb} \rightarrow \boldsymbol{p})) \rightarrow (\boldsymbol{pb} \rightarrow \boldsymbol{qa})$

Remarques

Dans la seconde partie de cette leçon, nous avons omis d'indiquer les accents des symboles prédicatifs. Comme cela ne peut créer aucune confusion, car il est toujours possible de les restaurer et d'une façon unique, nous continuerons à suivre cette bonne habitude.

Les verbes utilisés intransitivement comme 'court' dans 'Antoine court' sont traduits comme s'ils s'agissait de 'est' suivi de l'adjectif verbal ou du participe présent : 'est courant'.

Chaque leçon fixera son propre vocabulaire, qui restera le même pour toute la leçon, sauf dans les explications et remarques. C'est à l'aide de ce vocabulaire et de celui-là seulement qu'il faudra tenter de traduire les expressions françaises.

L'analyse logique doit donc, d'une part, faire apparaître aussi finement que souhaitable les structures logiques des expressions de la langue naturelle, en enrichissant au besoin la loglangue, mais elle doit aussi, d'autre part, se donner des contraintes qui font qu'on est tenu d'analyser au mieux les expressions avec les moyens du bord. Cette dernière exigence contribuera à mettre en lumière les limites de certains outils d'analyse, et non de l'analyse logique elle-même qui n'est évidemment pas plus limitée ni figée que ne l'est la langue naturelle, et permettra ainsi de mesurer la complexité relative des expressions. Un exemple simple illustrera cela : si on veut analyser la phrase 'Descartes est militaire et Descartes est philosophe' avec comme seules ressources les symboles propositionnels et les foncteurs de vérité, on n'obtiendra guère que p ou, un peu plus finement, $q \wedge r$ et on ne pourra jamais faire apparaître que l'élément 'Descartes' est commun aux deux composantes de la phrase, comme cela est manifeste dans $q^1 a \wedge r^1 a$.

Que l'énoncé $q \wedge r$ soit une traduction assez grossière de la phrase initiale, n'empêche pas qu'on a parfois raison de s'en contenter, comme lorsqu'on veut analyser le raisonnement :

Descartes est militaire et Descartes est philosophe
Donc Descartes est militaire

lequel se traduit parfaitement en :

$q \wedge r$
Donc q

Leçon 4. Il est russe

Vocabulaire

$\boldsymbol{a}$	moi	$\boldsymbol{p^1}$	russe	$\boldsymbol{q^1}$	beau	$\boldsymbol{s^1}$	garçon
$\boldsymbol{b}$	toi	$\boldsymbol{p^1_1}$	marchant	$\boldsymbol{r^1}$	fille		

Version

1. $\boldsymbol{px}$	Elle est russe.
2. $\boldsymbol{p_1x}$	Il marche.
3. $\boldsymbol{ry}$	C'est une fille.
4. $\boldsymbol{qy}$	Elle est belle.
5. $\boldsymbol{sy}$	C'est un garcon.
6. $\boldsymbol{\neg sy}$	Ce n'est pas un garcon.
7. $\boldsymbol{\neg rx \wedge sy}$	Ce n'est pas une fille, et lui c'est un garcon.
8. $\boldsymbol{ra \wedge p_1b}$	Je suis une fille et tu marches.
9. $\boldsymbol{sa \wedge pb}$	Je suis un garcon et tu es russe.
10. $\boldsymbol{py \wedge p_1y}$	Elle est russe et elle marche.

Explications

Les symboles x, y, z sont des **variables**. Il se traduisent en français par des mots comme 'il', 'elle', 'ceci', 'cela'. Ces mots ont quelquefois une fonction déictique, ils renvoient alors librement à des objets qui peuvent être différents selon les contextes. Le lien entre les variables et les objets n'est donc pas, comme dans le cas des constantes, fixé par l'interprétation des mots non logiques. C'est pourquoi les variables ne font pas partie du vocabulaire.

Les pronoms des deux premières personnes, 'je', 'tu' sont interprétés par des constantes. Des variables auraient aussi pu faire l'affaire, puisque la phrase « je pense », par exemple, n'a de valeur de vérité que lorsque le 'je' est précisé. Cependant dans une situation de discours, le 'je' et le 'tu' contrairement au 'il' se réfèrent automatiquement à un objet déterminé, à savoir le locuteur et l'allocutaire.

Le symbole p^1_1 est un symbole prédicatif unaire. On pourra à l'aide d'indices créer autant de symboles nouveaux qu'on le souhaite, des symboles propositionnels p_1, q_1, r_1, s_1, p_2..., des symboles prédicatifs unaires p^1_1, q^1_1, r^1_1, s^1_1, p^1_2...des constantes a_1, b_1, c_1, d_1, a_2...des variables x_1, y_1, z_1, x_2...

Thème

1. Cette fille est belle.	$\boldsymbol{rx \wedge qx}$
2. C'est une fille belle.	$\boldsymbol{rx \wedge qx}$
3. C'est une belle fille.	$\boldsymbol{rx \wedge qx}$
4. Ce garcon marche.	$\boldsymbol{sx \wedge p_1x}$
5. C'est un garcon qui marche.	$\boldsymbol{sx \wedge p_1x}$
6. Tu es une fille et lui c'est un garcon.	$\boldsymbol{rb \wedge sy}$
7. Si c'est une belle fille, il est russe.	$\boldsymbol{(ry \wedge qy) \rightarrow px}$
8. Si c'est une belle fille, elle est russe.	▲ $\boldsymbol{(ry \wedge qy) \rightarrow py}$ ▲ $\boldsymbol{(ry \wedge qy) \rightarrow px}$
9. Si cette fille est russe, je marche.	$\boldsymbol{(rx \wedge px) \rightarrow p_1a}$
10. Voilà une fille russe qui marche avec un beau garcon du même pays.	$\boldsymbol{rx \wedge px \wedge sy \wedge qy \wedge py \wedge p_1x \wedge p_1y}$

Remarques

Une expression comme p^1x signifie que x a la propriété p^1. Comme sa traduction possible 'elle est russe', cette expression n'est en soi ni vraie ni fausse. Elle n'est donc pas à proprement parler un énoncé, mais une **formule**. Les formules se construisent exactement comme les énoncés, sauf qu'il est permis d'introduire des variables là ou l'énoncé ne tolère que des constantes. Tout énoncé est donc également une formule.

Quoique n'étant ni vraie ni fausse, la formule p^1x le deviendra, en quelque sorte, lorsqu'on aura déterminé la valeur de x. Cette valeur peut être n'importe quel objet. Une attribution de valeurs aux variables est une (é)**valuation**. Puisque les mots logiques gardent toujours leur même sens, dès que l'interprétation des mots non logiques est fixée, un énoncé est vrai ou faux. Une formule, quant à elle, requiert en plus une valuation pour pouvoir être **satisfaite** ou non, c'est-à-dire pour qu'elle puisse devenir vraie ou fausse.

En vue de simplifier les notations, les formule du type $(((A \wedge B) \wedge C) \wedge D)$, formées avec plusieurs conjoncteurs seront notées plus sobrement $A \wedge B \wedge C \wedge D$. Cette notation est d'autant plus justifiée que les formules comme $(((A \wedge B) \wedge C) \wedge D)$, $((A \wedge B) \wedge (C \wedge D))$, $(A \wedge ((B \wedge C) \wedge D))$, quoique différentes sont néanmoins équivalentes. On fera de même avec les disjonctions.

Leçon 5. Tout Russe est slave

Vocabulaire

$\boldsymbol{p}^1$ russe $\boldsymbol{q}^1$ slave

Version

1. $\forall \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{px}$	Tout est russe
2. $\exists \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{px}$	Quelque chose est russe.
3. $\exists \boldsymbol{x}\, \neg \boldsymbol{px}$	Quelque chose n'est pas russe.
4. $\neg\exists \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{px}$	Rien n'est russe.
5. $\neg\forall \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{px}$	Tout n'est pas russe.
6. $\forall \boldsymbol{y}\, \boldsymbol{py}$	Tout est russe
7. $\exists \boldsymbol{z}\, \boldsymbol{pz}$	Quelque chose est russe.
8. $\neg\forall \boldsymbol{y}\, \neg \boldsymbol{py}$	▲ Tout n'est pas non russe. ▲ Quelque chose est russe.
9. $\neg\exists \boldsymbol{z} \neg \boldsymbol{pz}$	▲ Rien n'est non russe. ▲ Tout est russe.
10. $\forall \boldsymbol{y}\, \boldsymbol{py} \rightarrow \boldsymbol{qx}$	Si tout est russe, elle est slave.

Explications

'Tout est vain.' peut s'interpréter comme signifiant que pour tout objet la phrase 'ceci est vain' est vraie lorsque 'ceci' désigne cet objet. Si s^1x traduit 'ceci est vain', $\forall x\, s^1x$ pourra traduire 'Tout est vain.' De façon analogue 'quelque chose est vaine' peut se lire comme 'ceci est vain' est satisfait par au moins une valeur de 'ceci', ce qui se traduit $\exists x\, s^1x$.

Alors que la formule s^1x n'est pas un énoncé, $\forall x\, s^1x$ et $\exists x\, s^1x$ sont des énoncés. Plus besoin ici d'évaluer x pour déterminer si $\forall x\, s^1x$ ou $\exists x\, s^1x$ sont vrais ou non. Les valeurs de x n'y comptent plus, à tel point que les énoncés $\forall y\, s^1y$, $\forall z\, s^1z$ disent tous la même chose.

Thème

1. Quelque russe est slave.	▲ $\exists \boldsymbol{x}\, (\boldsymbol{px} \wedge \boldsymbol{qx})$ ▲ $\neg\forall \boldsymbol{x}\, (\boldsymbol{px} \rightarrow \neg \boldsymbol{qx})$
2. Quelque russe n'est pas slave.	$\exists \boldsymbol{x}\, (\boldsymbol{px} \wedge \neg \boldsymbol{qx})$

3. Tout russe est slave.	▴ $\forall x\,(px \rightarrow qx)$ ▴ $\neg\exists x\,(px \wedge \neg qx)$
4. Tout russe n'est pas slave.	▴ $\neg\forall x\,(px \rightarrow qx)$ ▴ $\exists x\,(px \wedge \neg qx)$ ▴ $\exists x\,(px \wedge \neg qx) \wedge \exists x\,(px \wedge qx)$
5. Quelque chose est telle qu'elle est russe seulement si elle est slave.	$\exists x\,(px \rightarrow qx)$
6. Tout est russe et non slave.	▴ $\forall x(px \wedge \neg qx)$ ▴ $\neg\exists x\,(px \rightarrow qx)$
7. Aucun Russe n'est slave.	▴ $\forall x\,(px \rightarrow \neg qx)$ ▴ $\neg\exists x\,(px \wedge qx)$
8. Tout qui n'est pas russe est slave.	$\forall x\,(\neg px \rightarrow qx)$
9. Il y a des choses qui ne sont pas à la fois russes et slaves.	$\exists x \neg(px \wedge qx)$
10. Quel que soit l'individu, il n'est pas vrai que s'il est russe il n'est pas slave	▴ $\forall x\,\neg(px \rightarrow \neg qx)$ ▴ $\forall x\, px \wedge \forall x\, qx$

Remarques

Un **quantificateur universel** est formé du symbole $\forall$ suivi d'une variable. Un **quantificateur existentiel** est formé du symbole $\exists$ suivi d'une variable. Un quantificateur suivi d'une formule est encore une formule.

La formule $\forall\alpha\, A$ est satisfaite par une valuation v ssi pour tout objet la formule A est satisfaite par la valuation qui associe cet objet à α et qui pour le reste se comporte comme v. Autrement dit, la valuation v satisfait la formule $\forall\alpha A$ ssi la formule A est satisfaite par toute valuation qui associe à toute variable autre que α le même objet que v.

La formule $\exists\alpha\, A$ est satisfaite, par une valuation v, ssi il y a au moins un objet tel que la formule A est satisfaite par la valuation qui associe cet objet à α et qui pour le reste se comporte comme v. Autrement dit, il y a une valuation qui ne diffère au plus de v que par la valeur attribuée à α et qui satisfait A.

Leçon 6. Paul aime Sophie

Vocabulaire

$\boldsymbol{a}$	Paul	$\boldsymbol{p^1}$	russe	$\boldsymbol{r^2}$	aimant
$\boldsymbol{b}$	Sophie	$\boldsymbol{q^1}$	belge	$\boldsymbol{s^2}$	plus jeune que

Version

1. $\boldsymbol{s^2ab}$	Paul est plus jeune que Sophie.
2. $\boldsymbol{\neg s^2ab}$	Paul n'est pas plus jeune que Sophie.
3. $\boldsymbol{r^2ab}$	Paul aime Sophie.
4. $\boldsymbol{r^2ba}$	Sophie aime Paul
5. $\boldsymbol{r^2aa}$	▲ Paul aime Paul. ▲ Paul s'aime lui-même.
6. $\boldsymbol{s^2ba}$	Paul est plus âgé que Sophie.
7. $\boldsymbol{\exists x\, s^2ax}$	▲ Paul est plus jeune que quelqu'un. ▲ Paul n'est pas le plus âgé.
8. $\boldsymbol{\exists x\, s^2xa}$	▲ Elle est plus jeune que Paul. ▲ Paul n'est pas le plus jeune.
9. $\boldsymbol{\exists x\, r^2ax}$	▲ Paul aime quelqu'un ou quelque chose. ▲ Paul est amoureux.
10. $\boldsymbol{\neg\exists x\, r^2xa}$	Paul n'est pas aimé.

Explications

Les lettres p^2, q^2, r^2, s^2, p_1^2, q_1^2, r_1^2, s_1^2, p_2^2 etc sont des **symboles prédicatifs binaires**. Ces symboles s'interprètent par des relations. Un énoncé comme p^2ab signifie que (l'objet désigné par) a entretient la relation (désignée par) p^2 avec (l'objet désigné par) b.

Si p^2 désigne la relation d'amour, a désigne Roméo et b désigne Juliette. La phrase p^2ab signifie que Roméo aime Juliette.

Les exposants des symboles p^1 et p^2, indiquent que le premier est un symbole unaire qui désigne une propriété s'appliquant à des objets et le second un symbole binaire, qui désigne une relation reliant des objets. Ces deux symboles sont donc de nature très différente. Nonobstant cela, aucune ambiguïté ne surgit si on n'écrit pas leurs exposants, puisqu'une formule constituée d'un symbole suivi de zéro, un ou deux termes est nécessairement un symbole propositionnel ou est construite avec un symbole prédicatif unaire ou un symbole prédicatif binaire, respectivement.

Thème

1. Paul est un amant de Sophie.	$\boldsymbol{rab}$
2. Si Sophie aime Paul, je veux bien être pendu.	$\neg \boldsymbol{rba}$
3. Paul n'est pas plus jeune qu'il n'est.	$\neg \boldsymbol{saa}$
4. Sophie ne s'aime pas, mais Paul si.	▲ $\neg \boldsymbol{rbb} \wedge \boldsymbol{raa}$ ▲ $\boldsymbol{rba}$
5. Paul, qui est russe, aime Sophie, qui est belge.	$\boldsymbol{pa} \wedge \boldsymbol{rab} \wedge \boldsymbol{qb}$
6. Sophie n'est pas la plus jeune des Belges.	$\exists \boldsymbol{x}\, (\boldsymbol{qx} \wedge \boldsymbol{sxb})$
7. Paul aime les Russes en général et Sophie en particulier.	▲ $\forall \boldsymbol{x}\, (\boldsymbol{px} \rightarrow \boldsymbol{rax}) \wedge \boldsymbol{pb}$ ▲ $\forall \boldsymbol{x}\, (\boldsymbol{px} \rightarrow \boldsymbol{rax}) \wedge (\boldsymbol{pb} \wedge \boldsymbol{rab})$ ▲ $\forall \boldsymbol{x}\, (\boldsymbol{px} \rightarrow \boldsymbol{rax}) \wedge \boldsymbol{rab}$
8. Le Belge Paul n'aime pas trop les Russes.	$\boldsymbol{qa} \wedge \forall \boldsymbol{x}\, (\boldsymbol{px} \rightarrow \neg \boldsymbol{rax})$
9. Si Paul aime Sophie, Sophie n'aime pas Paul.	$\boldsymbol{rab} \rightarrow \neg \boldsymbol{rba}$
10. Tous les amateurs de Sophie sont belges.	$\forall \boldsymbol{x}\, (\boldsymbol{rxb} \rightarrow \boldsymbol{qx})$

Remarques

Les symboles prédicatifs binaires se traduisent en français par une expression qui, comme un verbe utilisé transitivement avec un complément direct, désigne une relation.

La vieille logique lit 'Roméo aime Juliette' comme « Roméo est aimant Juliette », signifiant que la propriété « aimant Juliette » s'applique à l'objet Roméo. Ce qui en loglangue donne r^1a — r^1 et a traduisant 'aimant Juliette' et 'Roméo'. 'Juliette aime Roméo' se traduit de même par s^1b — s^1 et b traduisant 'aimant Roméo' et 'Juliette'. On occulte ainsi le lien affirmé entre Roméo et Juliette.

Des deux symboles p^1 et p^2, le premier désigne une propriété, le second une relation. La notation a été choisie de façon à indiquer la similitude qu'il y a entre ces deux notions. L'exposant indique l'**arité**, c'est-à-dire le caractère unaire ou binaire de la notion. Cette arité correspond syntaxiquement au nombre (d'occurrences) de termes qui doivent suivre le symbole pour obtenir une formule, et sémantiquement au fait que les propriétés s'appliquent ou non à des objets isolés tandis que les relations concernent des couples d'objets, ou suites d'objets de longueur deux. La notion d'arité est liée à celle d'**argument**. Une propriété a un argument et une relation en a deux.

Leçon 7. Tout le monde aime tout le monde

Vocabulaire

$\boldsymbol{a}$	Paul	$\boldsymbol{p^1}$	russe	$\boldsymbol{r^1}$	garçon	$\boldsymbol{r^2}$	aimant
$\boldsymbol{b}$	Sophie	$\boldsymbol{q^1}$	slave	$\boldsymbol{s^1}$	fille	$\boldsymbol{s^2}$	plus jeune que

Version

1. $\forall \boldsymbol{x} \neg \boldsymbol{rax}$	Paul n'aime personne.
2. $\forall \boldsymbol{x} \neg \boldsymbol{rxy}$	Personne ne l'aime.
3. $\boldsymbol{pa} \wedge \boldsymbol{rab}$.	Paul est russe et Paul aime Sophie.
4. $\exists \boldsymbol{x}\, (\boldsymbol{px} \wedge \boldsymbol{rxb})$	Quelque russe aime Sophie.
5. $\forall \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{rxb}$	Tout le monde aime Sophie.
6. $\exists \boldsymbol{y} \forall \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{rxy}$	Il y a quelqu'un qui est aimé de tout le monde.
7. $\forall \boldsymbol{x} \exists \boldsymbol{y}\, \boldsymbol{rxy}$	Tout le monde aime quelqu'un.
8. $\forall \boldsymbol{x} \forall \boldsymbol{y}\, \boldsymbol{rxy}$	Tout le monde aime tout le monde.
9. $\neg \exists \boldsymbol{x} \forall \boldsymbol{y}\, \boldsymbol{ryx}$	Personne n'est aimé de tout le monde.
10. $\forall \boldsymbol{x} \forall \boldsymbol{y}\, \boldsymbol{rxy} \rightarrow \forall \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{rxx}$	Si tout le monde aime tout le monde, alors tout le monde s'aime.

Explications

Quand on dit 'tout va mal', on n'entend pas cela au sens tout à fait strict que tout objet est tel que 'il va mal' si 'il' désigne cet objet, mais on restreint implicitement ses prétentions. 'Tout va mal' signifie normalement que tout objet d'une classe ou d'un ensemble considéré va mal. Dans ce cas-ci ce pourrait être un ensemble d'événements.

Pour traduire correctement des phrases françaises avec quantificateurs, il faut non seulement déterminer la traduction des noms d'objets, de propriétés, de relations et de valeurs de vérité, mais encore déterminer l'ensemble des objets sur lesquels on quantifie, l'**univers** de référence.

Donc si l'univers est l'ensemble des animaux malades, 'tout animal malade ne mourait pas, mais tout animal malade était frappé' peut se dire 'tout ne mourait pas, mais tout était frappé' ou comme La Fontaine 'tous ne mouraient pas, mais tous étaient frappés'. Si en revanche l'univers comprend tous les êtres morts, 'tout ne mourait pas' signifie autre chose.

On appelle **modèle** un univers et une interprétation des expressions non logiques dans cet univers.

L'univers doit être déterminé pour qu'une traduction soit sans équivoque. Il n'est cependant pas toujours indispensable de l'indiquer expressément, car il peut pratiquement s'induire de la phrase et du contexte. Ainsi, dans cette leçon, l'univers est l'ensemble des êtres humains.

Thème

1. Une fille aime un garcon.	▲ $\exists x \exists y\,(sx \wedge ry \wedge rxy)$ ▲ $\forall x\,(sx \rightarrow \exists y\,(ry \wedge rxy))$
2. Les Russes n'aiment pas les slaves.	$\forall x \forall y\,((px \wedge qy) \rightarrow \neg rxy)$
3. Les Russes n'aiment que les Russes.	$\forall x \forall y\,((px \wedge rxy) \rightarrow py)$
4. Les Russes sont plus jeunes que les slaves.	$\forall x \forall y\,((px \wedge qy) \rightarrow sxy)$
5. Toutes les filles aiment un garcon.	▲ $\forall x\,(sx \rightarrow \exists y\,(ry \wedge rxy))$ ▲ $\forall x\,\exists y\,(sx \rightarrow (ry \wedge rxy))$ ▲ $\exists y\,(ry \wedge \forall x\,(sx \rightarrow rxy))$
6. Tout russe est un russe.	▲ $\forall x\,(px \rightarrow px)$ ▲ $\forall x\,\exists\,y(px \rightarrow py)$ ▲ $\exists\,y \forall x\,(px \rightarrow py)$
7. Un garcon aime toutes les filles.	▲ $\forall x\,(rx \rightarrow \forall y\,(sy \rightarrow rxy))$ ▲ $\exists x\,(rx \wedge \forall y\,(sy \rightarrow rxy))$
8. Les filles aiment les garcons plus jeunes qu'elles.	▲ $\forall x\,(sx \rightarrow \forall y\,((ry \wedge syx) \rightarrow rxy))$ ▲ $\forall x\,(sx \rightarrow \forall y\,((ry \wedge rxy) \rightarrow syx))$
9. Les filles slaves sont plus jeunes que les garcons russes dont elles sont amoureuses.	$\forall x\,((sx \wedge qx) \rightarrow$ $\forall y\,((ry \wedge py \wedge rxy) \rightarrow sxy))$
10. Tout slave est plus jeune qu'au moins un russe et inversement	$\forall x \exists y\,(qx \rightarrow (py \wedge sxy)) \wedge$ $\forall y \exists x\,(qy \rightarrow (px \wedge syx))$

Remarques

Nous avons dit plus haut qu'en français, des expressions comme 'il', 'elle', 'ceci', 'cela' etc peuvent avoir une fonction déictique c'est-à-dire renvoyer librement à un objet variant selon le contexte. Dans la phrase isolée 'il fait les courses', 'il' peut selon le contexte désigner des individus différents.

Mais ces expressions peuvent aussi avoir une fonction anaphorique. En ce cas, leur référence n'est plus libre mais dépend de la référence d'une autre expression de la phrase. Le 'le' dans 'Pierre, elle le voit' est usuellement anaphorique, car le 'le' renvoie au même objet que 'Pierre'. Le 'elle' par contre est déictique.

Dans le cas de la loglangue, la situation est plus compliquée. Les notions d'occurrences déictique et anaphorique semblent garder leur sens. Dans $px \to qx$, la référence de la seconde occurrence de x, dépend de la référence de la première occurrence de x. Donc, elle est anaphorique, mais la référence de la première occurrence dépend aussi bien de la référence de la seconde. Elle est donc aussi anaphorique !

La formule $\forall x\, px \to qx$, traduite mot à mot, pourrait signifier que si pour tout objet, cet objet est russe, alors cet objet est slave. La seconde occurrence de l'expression 'cet objet' a une fonction déictique, mais la première n'est pas déictique car elle est reliée à la première occurrence de 'objet', de sorte que sa référence ne saurait être donnée indépendamment. Mais elle n'est pas davantage anaphorique, car en réalité elle n'a pas de référence du tout. C'est pourquoi cette occurrence de 'cet objet' n'est plus mentionnée dans la traduction 'si tout est russe, cet objet est slave'.

L'énoncé $\forall x\,(px \to qx)$, traduit mot à mot, devient 'pour tout objet, si cet objet est russe, alors cet objet est slave'. Cette fois aucune des occurrences de 'cet objet' n'est déictique. Elles disparaissent dans la traduction 'tout russe est slave'.

Nous dirons que dans $\forall x\, px \to qx$, les deux premières occurrences de x sont « liées » et la dernière « libre », mais qu'elles sont toutes liées dans $\forall x\,(px \to qx)$. Des remarques analogues valent pour des expressions mentionnant $\exists$. Voici les définitions explicites de ces notions.

Une occurrence de la variable α est dite **liée** ssi elle figure dans une formule de la forme $\forall\alpha\, A$ ou $\exists\alpha\, A$. Une occurrence de la variable α dans une formule est **libre** si elle n'est pas liée, c'est-à-dire si elle ne figure pas dans une sous-formule (de cette formule) de la forme $\forall\alpha\, A$ ou $\exists\alpha\, A$.

Un énoncé est une formule susceptible d'être vraie ou fausse. Si une formule contient une occurrence libre de variable, sa valeur de vérité ne pourra généralement, être déterminée que si on évalue les variables (ayant des occurrences) libres de la formule. Si elle ne contient pas de (occurrences de) variables libres, sa valeur est seulement fonction de l'interprétation des symboles non logiques. Nous pouvons ainsi donner une définition syntaxique de la notion d'énoncé : un énoncé est une formule qui ne contient pas d'occurences libres de variables. Donc dans un énoncé chaque (occurrence de) variable est soit une partie d'un quantificateur, soit se trouve dans une sous-formule qui commence par un quantificateur comprenant cette variable.

Leçon 8. Paul donne un livre à Sophie

Vocabulaire

$\boldsymbol{a}$	Paul	$\boldsymbol{a_2}$	Namur	$\boldsymbol{p^2}$	rencontrant
$\boldsymbol{b}$	Sophie	$\boldsymbol{a_3}$	Wavre	$\boldsymbol{q^3}$	rencontrant...dans...
$\boldsymbol{c}$	Moi	$\boldsymbol{a_4}$	Gembloux	$\boldsymbol{r^3}$	donnant...à...
$\boldsymbol{d}$	Toi	$\boldsymbol{a_5}$	Louvain-la-Neuve	$\boldsymbol{s^3}$	préférant...à...
$\boldsymbol{a_1}$	Bruxelles	$\boldsymbol{p^1}$	livre	$\boldsymbol{s^5}$	entre...et...sur la ligne qui joint...à...

Version

1. $\boldsymbol{pab}$	Paul rencontre Sophie.
2. $\boldsymbol{qaba_5}$	Paul rencontre Sophie à Louvain-la-Neuve.
3. $\boldsymbol{qbca_5}$	Sophie me rencontre à Louvain-la-Neuve.
4. $\boldsymbol{qcda_4}$	Je te rencontre à Gembloux.
5. $\boldsymbol{\exists x\, qcdx}$	Je te rencontre.
6. $\boldsymbol{pab \wedge pba}$	Paul et Sophie se rencontrent.
7. $\boldsymbol{saa_2a_1}$	Paul préfère Namur à Bruxelles.
8. $\boldsymbol{pab \wedge saba}$	Paul rencontre Sophie et la préfère à lui-même.
9. $\boldsymbol{sa_5a_3a_4a_1a_2}$	Louvain-la-Neuve se trouve entre Wavre et Gembloux sur la ligne qui joint Bruxelles à Namur.
10. $\boldsymbol{sa_5a_3a_4a_3a_4}$	Louvain-la-Neuve se trouve entre Wavre et Gembloux.

Explications

Les symboles p^3, q^3, r^3, s^3, p^4, q^4, r^4, s^4, p^5, q^5, r^5, s^5 etc sont des symboles prédicatifs ou relationnels ternaires (ou trois-aires), quatre-aires, cinq-aires etc.

Ces symboles s'interprètent par des relations ternaires, quatre-aires, cinq-aires. Une formule comme p^3abx signifie que les objets désignés par a, b, x sont dans la relation désignée par p^3.

Si p^3 désigne la relation de jalousie, a désigne Roméo, b Rodrigue et c Chimène, la phrase p^3abc signifie que Roméo est jaloux de Rodrigue à cause de Chimène.

Dans un symbole comme p^n l'exposant n indique qu'il faut le compléter avec n termes pour obtenir une formule ou un énoncé.

Les symboles propositionnels sont des énoncés, il faut donc les compléter avec zéro terme pour obtenir une formule, leur arité est par conséquent 0 et ce sont des symboles prédicatifs nulaires ou zéro-aires, quoiqu'on ne leur affecte pas d'exposant.

Thème

1. Je ne rencontre personne.	$\neg\exists \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{pcx}$
2. Paul donne un livre à Sophie.	$\exists \boldsymbol{x}\, (\boldsymbol{px} \wedge \boldsymbol{raxb})$
3. Sophie a recu un livre.	$\exists \boldsymbol{y}\exists \boldsymbol{x}\, (\boldsymbol{px} \wedge \boldsymbol{ryxb})$
4. Paul s'offre un livre.	$\exists \boldsymbol{x}\, (\boldsymbol{px} \wedge \boldsymbol{raxa})$
5. Il n'y a rien entre Paul et Sophie.	$\neg\exists \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{sxabab}$
6. En allant de Namur à Bruxelles, on passe par Gembloux avant d'arriver à Wavre.	$\boldsymbol{sa_3a_2a_1a_2a_1} \wedge \boldsymbol{sa_4a_2a_1a_2a_1} \wedge \boldsymbol{sa_4a_2a_3a_2a_3}$
7. Je rencontre Sophie quelque part entre deux villes sur la route de Bruxelles à Namur.	$\exists \boldsymbol{x}\exists \boldsymbol{y}\exists \boldsymbol{z}(\boldsymbol{qcax} \wedge \boldsymbol{sxyza_1a_2})$
8. Lorsque Paul rencontre Sophie à Namur, il lui donne son livre préféré.	$\boldsymbol{qaba_2} \wedge \exists \boldsymbol{x}\, (\boldsymbol{px} \wedge \boldsymbol{raxb} \wedge \forall \boldsymbol{y}\, (\boldsymbol{py} \rightarrow \boldsymbol{sbxy}))$
9. Tous ceux qui la lui préfèrent ont rendez-vous avec Sophie entre Bruxelles et Louvain-la-Neuve.	$\forall \boldsymbol{x}\, (\boldsymbol{sxby} \rightarrow \exists \boldsymbol{z}\, (\boldsymbol{qxbz} \wedge \boldsymbol{sza_1a_5a_1a_5}))$
10. Rencontrer quelqu'un, c'est forcément le rencontrer quelque part.	$\blacktriangle \forall \boldsymbol{x}\, (\exists \boldsymbol{y}\, \boldsymbol{pxy} \rightarrow \exists \boldsymbol{z}\exists \boldsymbol{y}\, \boldsymbol{qxyz})$ $\blacktriangle \forall \boldsymbol{x}\, (\exists \boldsymbol{z}\exists \boldsymbol{y}\, \boldsymbol{qxyz} \rightarrow \exists \boldsymbol{z}\exists \boldsymbol{y}\, \boldsymbol{qxyz})$

Remarques

Les symboles prédicatifs $n-$aires se traduisent par des verbes munis d'indicateurs de compléments : α est jaloux de β à cause de γ, α donne β à γ, α boit β à l'endroit e au moment t en compagnie de δ à l'occasion de ϵ etc

Dans 'Ève mange la pomme', 'mange' désigne une relation entre Ève et la pomme. Elle est donc à deux arguments. Mais comme on peut également dire 'Ève mange' on devrait conclure qu'elle n'a qu'un argument. Mais, on peut encore dire 'Ève mange la pomme au dessert', auquel cas « mange » devient une relation ternaire reliant, Ève, la pomme et le dessert. ‘mange’ doit-il être considéré comme un symbole unaire, binaire ou ternaire ?

Cela dépend de ce qu’on veut retenir de la phrase. En logique élémentaire, on adopte deux solutions. La première consiste à distinguer, pour une relation de ce type, différentes relations, chacune ayant un nombre d’arguments fixé : mange_1, mange_2, mange_3. En ce cas, il faudra rendre compte des similitudes qu’il y a entre elles et qui font, par exemple, que le fait que Ève mange_2 la pomme impliquera que Ève mange_1. Mais il faut être prudent et tenir compte de la spécificité des verbes et de leur usage. ‘Ève boit son verre d’eau’, peut impliquer ou ne pas impliquer que ‘Ève boit’, car en français le sens de verbes comme ‘boire’ ou ‘sentir’, mais pas ‘manger’, peut changer selon qu’ils sont employés transitivement ou intransitivement.

La deuxième consiste à introduire des quantificateurs existentiels : ‘Ève mange’ signifiant, qu’il y a une chose, un endroit, un moment, une circonstance, etc. tels que Ève mange cette chose en cet endroit, à ce moment, en cette circonstance... Le prix à payer ici est qu’il faut déterminer une fois pour toutes le nombre de compléments, qui est extensible.

Il y a une autre issue possible que nous ne retenons pas et qui est celle de certains grammairiens. Elle consiste à introduire la notion d’argument vide ou d’effacement de certains arguments : ‘Ève mange’ s’interprète alors « Ève mange $\varnothing$ » ou « Ève mange (la pomme) ». La notion d’argument vide est en réalité assez voisine de la quantification. L’effacement des arguments revient à considérer que les relations n’ont pas un nombre fixé d’arguments, mais un nombre minimum et, éventuellement, un nombre maximum. L’arité ne serait dans ce cas plus un nombre, mais un ensemble fini de nombres.

Les grammairiens distinguent parfois deux verbes ‘manger’, l’un strictement transitif et l’autre intransitif, soit le plus souvent rangent un unique verbe ‘manger’ dans la catégorie des verbes transitifs admettant un complément d’objet vide, ou permettant l’effacement ou l’ellipse de l’objet.

Leçon 9. Athènes est la capitale de la Grèce

Vocabulaire

$\boldsymbol{a}$	Aristote	$\boldsymbol{c}$	Athènes	$\boldsymbol{p^1}$	beau	$\boldsymbol{f^1}$	la capitale de
$\boldsymbol{b}$	la Grèce	$\boldsymbol{d}$	Stagire	$\boldsymbol{q^2}$	dans	$\boldsymbol{g^1}$	l'homme de

Version

1. $\boldsymbol{p^1 c}$	Athènes est belle.
2. $\boldsymbol{q^2 cb}$	Athènes est en Grèce
3. $\boldsymbol{c = f^1 b}$	Athènes est la capitale de la Grèce
4. $\boldsymbol{a = g^1 d}$	Aristote est le Stagirite.
5. $\boldsymbol{f^1 b = c}$	La capitale de la Grèce est Athènes.
6. $\boldsymbol{q^2 ac}$	▲ Aristote est à Athènes. ▲ Aristote se trouve à Athènes.
7. $\boldsymbol{\neg\neg a = g^1 d}$	Aristote n'est autre que le Stagirite.
8. $\boldsymbol{q^2 a f^1 b}$	Aristote se trouve dans la capitale de la Grèce.
9. $\boldsymbol{\neg q g^1 dc}$	Le Stagirite n'est pas à Athènes
10. $\boldsymbol{q g^1 dc \wedge \neg qab}$	Le Stagirite est à Athènes et Aristote n'est pas en Grèce

Explications

Les symboles f^1, g^1, h^1, f^1_1 etc sont des symboles fonctionnels unaires. Ils se traduisent par des expressions comme le 'F de...'. Si F est un symbole fonctionnel unaire et si t, est un terme, alors Ft est aussi un terme.

Le symbole '=' est un symbole prédicatif binaire particulier. Il représente l'identité ou l'égalité. 't_1=t_2' signifie que l'interprétation de 't_1' est la même que celle de 't_2'. Puisque '=' s'interprète toujours de la même façon, à savoir comme l'égalité, il est un mot logique. À la différence des autres symboles prédicatifs binaires, '=' ne s'écrit pas devant ses arguments, mais entre eux.

Nous avons maintenant en main suffisamment d'ingrédients pour constituer toutes les formules et donc tous les énoncés de la loglangue. Les formules complexes sont composées à partir de formules élémentaires en utilisant les foncteurs de vérité et les quantificateurs. Les formules élémentaires sont toutes de la forme X, $t_1 = t_2$ ou $Xt_1...t_n$ où les t_i sont des termes et X un symbole propositionnel ou prédicatif. Les termes sont tous de la forme $Ft_1...t_n$ ou des constantes ou des variables, les t_1, ..., t_n étant des termes.

Thème

1. La capitale de la Grèce est Athènes.	$\boldsymbol{f^1b = c}$
2. Non, ce n'est pas Aristote la capitale de la Grèce, mais Athènes.	$\boldsymbol{\neg a = f^1b \wedge f^1b = c}$
3. Si le Grec n'est pas à Athènes, il ne se trouve pas en Grèce	$\boldsymbol{\neg qg^1bc \rightarrow \neg qg^1bb}$
4. Aristote se trouve à Athènes, la belle capitale de la Grèce.	$\boldsymbol{q^2ac \wedge pc \wedge c = f^1b}$
5. Tout est capitale de quelque chose.	$\boldsymbol{\forall x \exists y\, x = f^1y}$
6. Toute chose a sa capitale.	$\boldsymbol{\forall x \exists y\, f^1x = y}$
7. Tout n'est pas la capitale de tout.	$\boldsymbol{\neg \forall x \forall y\, f^1x = y}$
8. Il y a une chose qui n'est pas capitale.	$\boldsymbol{\exists x \exists y\, \neg f^1x = y}$
9. Toutes les choses n'ont pas la même capitale.	$\boldsymbol{\neg \exists x \forall y\, f^1y = x}$
10. Toute chose n'est pas la capitale de quelque chose.	$\boldsymbol{\forall x \exists y\, \neg f^1y = x}$

Remarques

Être se dit de plusieurs façons. En français on peut distinguer au moins cinq usages logiquement distincts du verbe être.

Dans les jugements d'existence ou de non-existence. 'Dieu n'est pas' peut se lire soit, en faisant de l'existence une propriété, comme 'Dieu n'est pas existant' $\neg r^1d$, soit comme signifiant qu'il n'y a pas de Dieu. Dans ce dernier cas, 'Dieu' peut être interprété comme un objet $\neg\exists x\, x = d$ (ce qui est toujours faux), soit comme une propriété $\neg\exists x\, s^1x$, il n'y a pas d'être divin.

Dans les jugements du genre Paris est grande, Paris est une ville, le 'est' indique le rapport d'un objet et d'une propriété : p^1a.

Dans les jugements ' tout Grec est homme', 'tous les Grecs sont des hommes', 'quelque Grec est homme', 'aucun Grec n'est homme' etc le 'est' indique une relation non pas entre un objet et une propriété, mais entre des propriétés : $\forall x\,(p^1x \to q^1x)$, $\exists x\,(p^1x \wedge q^1x)$, $\forall x\,(p^1x \to \neg q^1x)$.

Dans les énoncés ‘ Paris est la ville lumière’, ‘Paris est Lutèce’, le ‘est’ renvoie à l’égalité ou l’identité, qui est une relation entre objets : ‘Paris égale la ville lumière’, $a = b$.

Enfin dans ‘ Paul est à Paris’, on rencontre également une relation entre objets : s^2ab.

Certaines de ces distinctions logiques occultées en français, mais explicitement dégagées dans la loglangue, peuvent se rencontrer dans d’autres langues naturelles. Ainsi, on n’utilisera pas le même verbe pour dire en espagnol ou en portugais ‘Paul est petit’ et ‘Paul est à Paris’ : Pablo *es* bajo, Pablo *está* en Paris.

Leçon 10. Le père de Chimène n'aime pas Rodrigue

Vocabulaire

$\boldsymbol{a}$	Rodrigue	$\boldsymbol{a_{101}}$	101	$\boldsymbol{f^2}$	la fille de...et de...
$\boldsymbol{b}$	Chimène	$\boldsymbol{b_1}$	zéro	$\boldsymbol{g^2}$	la somme de...et de...
$\boldsymbol{c}$	l'Espagne	$\boldsymbol{f^1}$	la capitale de	$\boldsymbol{p^1}$	nombre naturel
$\boldsymbol{a_{78}}$	78	$\boldsymbol{g^1}$	le père de	$\boldsymbol{q^2}$	aimant
$\boldsymbol{a_{83}}$	83	$\boldsymbol{h^1}$	l'âge de		

Version

1. $\boldsymbol{\neg qg^1ba}$	Le père de Chimène n'aime pas Rodrigue.
2. $\boldsymbol{qg^1bf^1c}$	Le père de Chimène aime la capitale de l'Espagne.
3. $\boldsymbol{qf^2bag^1a}$	La fille de Chimène et de Rodrigue aime le père de Rodrigue.
4. $\boldsymbol{\neg g^2a_{78}a_{83} = a_{101}}$	$78 + 83 \neq 101$
5. $\boldsymbol{qg^1bh^1g^1b}$	Le père de Chimène aime son âge.
6. $\boldsymbol{h^1a = h^1b}$	Rodrigue a le même âge que Chimène.
7. $\boldsymbol{b = a \rightarrow h^1b = h^1a}$	Si Chimène est Rodrigue, ils ont le même âge.
8. $\boldsymbol{h^1g^1a = g^2h^1aa_{78}}$	▲ L'âge du père de Rodrigue est la somme de l'âge de Rodrigue et de 78. ▲ Le père de Rodrigue a eu son fils à 78 ans.
9. $\boldsymbol{h^1a = a_{78} \wedge \neg h^1a = h^1b}$	Rodrigue a 78 ans et Chimène n'a pas le même âge que lui.
10. $\boldsymbol{\forall x \exists y\, (py \wedge y = h^1x)}$	Un âge est un nombre.

Explications

Les symboles f^2, g^2, h^2, f^3, g^3, h^3 etc sont des symboles fonctionnels plus que unaires. Ils se traduisent par des expressions comme 'le F de...et de...et de...'. Comme pour les symboles prédicatifs, les exposants indiquent l'arité ou le nombre d'arguments. Cela signifie que si F est un symbole fonctionnel binaire, et si t_1, t_2

sont des termes, alors Ft_1t_2 est aussi un terme. De même $Ft_1t_2t_3$ est un terme, si F est un symbole fonctionnel ternaire et si t_1, t_2 et t_3 sont des termes.

Nous obtenons par cette construction tous les termes de la loglangue. Voici, par exemple, une série de termes de plus en plus complexes : a, x, f^2ax, g^1f^2ax, $f^2f^2axg^1f^2ax$, $g^1f^2f^2axg^1f^2ax$, $f^2f^2f^2axg^1f^2axg^1f^2f^2axg^1f^2ax$.

Il est recommandé aux débutants de ne pas omettre dans l'écriture les exposants marquant l'arité des symboles fonctionnels, car cela peut engendrer l'ambiguïté : $fgab$ peut se lire f^2g^1ab ou f^1g^2ab, $pfab$ peut provenir de p^1f^2ab ou de p^2f^1ab. Si on respecte cette règle, il n'y aucun risque d'ambiguïté à omettre les accents des symboles prédicatifs.

Thème

1. L'arrière grand-père doublement paternel de Chimène a 101 ans.	$\boldsymbol{h^1g^1g^1g^1b = a_{101}}$
2. Le père de Rodrigue n'a pas l'âge de la capitale de l'Espagne.	$\boldsymbol{\neg h^1g^1a = h^1f^1c}$
3. Alors que Chimène vient seulement de fêter ses 83 printemps, la somme de son âge et de celui de Rodrigue est en fait identique à l'âge du père de Rodrigue.	$\boldsymbol{h^1b = a_{83} \wedge g^2h^1bh^1a = h^1g^1a}$
4. 78 est strictement inférieur à 83	$\boldsymbol{\exists x\,(px \wedge \neg x = b_1 \wedge g^2a_{78}x = a_{83})}$
5. L'unique enfant de Rodrigue et de Chimène est une fille et leurs petites filles n'ont pas encore un an.	$\boldsymbol{\forall x\,(\exists y\, f^2yf^2ab = x \rightarrow h^1x = b_1)}$
6. Rodrigue aime la différence d'âge de Chimène et de son père, qui est évidemment plus âgé qu'elle.	$\blacktriangle\,\boldsymbol{\forall x\,(g^2xh^1b = h^1g^1a \rightarrow q^2ax)}$ $\blacktriangle\,\boldsymbol{\forall x\,(g^2xh^1b = h^1g^1b \rightarrow q^2ax)}$ $\blacktriangle\,\boldsymbol{\exists x\,(g^2xh^1b = h^1g^1a \wedge q^2ax)}$ $\blacktriangle\,\boldsymbol{\exists x\,(g^2xh^1b = h^1g^1b \wedge q^2ax)}$
7. La fille de Chimène et du père de Rodrigue est plus âgée que le père de Chimène.	$\boldsymbol{\exists x\,(px \wedge \neg x = b_1 \wedge g^2h^1g^1bx = h^1f^2bg^1a)}$
8. Rodrigue adore les capitales qui sont plus vieilles que lui.	$\boldsymbol{\forall x\,((\exists y\, x = f^1y \wedge \exists z\,(pz \wedge \neg z = b_1 \wedge h^1x = g^2zh^1a)) \rightarrow qax)}$

9. Une condition nécessaire et suffisante pour que des nombres soient égaux est que leur différence est nulle.	▲$\forall \boldsymbol{x} \forall \boldsymbol{y}\,((\boldsymbol{px} \wedge \boldsymbol{py}) \rightarrow (\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \leftrightarrow \boldsymbol{g^2 b_1 x} = \boldsymbol{y}))$ ▲$\forall \boldsymbol{x} \forall \boldsymbol{y}\,((\boldsymbol{px} \wedge \boldsymbol{py}) \rightarrow (\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \leftrightarrow \forall \boldsymbol{z}\,((\boldsymbol{pz} \wedge (\boldsymbol{g^2 zx} = \boldsymbol{y} \vee \boldsymbol{g^2 zy} = \boldsymbol{x})) \rightarrow \boldsymbol{z} = \boldsymbol{b_1})))$
10. Les plus jeunes ne sont pas les plus âgés.	$\forall \boldsymbol{x} \forall \boldsymbol{y}\,(\exists \boldsymbol{z}(\boldsymbol{pz} \wedge \neg \boldsymbol{z} = \boldsymbol{b_1} \wedge \boldsymbol{g^2 hxz} = \boldsymbol{hy}) \rightarrow \neg \exists \boldsymbol{z}(\boldsymbol{pz} \wedge \neg \boldsymbol{z} = \boldsymbol{b_1} \wedge \boldsymbol{g^2 hyz} = \boldsymbol{hx}))$

Remarques

Les symboles fonctionnels désignent des fonctions. Une fonction est une entité qui associe à une suite d'objets, dont la longueur est l'arité de la fonction, un objet qu'on appelle la valeur de la fonction. On peut se représenter une fonction comme une machine qui transforme une suite d'objets, son entrée (input), en un objet, sa sortie (output).

Comme dans le cas des quantificateurs, une fonction ne doit pas nécessairement être applicable à tout objet ou suite d'objet. Quelle est la mère d'un caillou ? Elle doit l'être à tout objet de l'univers de référence et sa valeur doit être un élément de cet univers. Si cet univers est l'ensemble des chevaliers de la table ronde, l'expression 'le chevalier assis à la droite de' désigne une fonction. Si l'univers est restreint aux deux fils d'un même individu, 'le frère de' est également une fonction.

Cependant, la langue courante ne suit généralement pas. Si nous limitons notre univers aux Belges, 'la main gauche de' ne désigne pas selon son sens usuel une fonction, car ou la main gauche de Paul n'est plus belge, ou 'la main gauche de la main gauche de Paul' n'a plus de sens. De même « le père de » ou « la soeur de » ne sont pas normalement des fonctions. Ceci dit, on peut toujours supposer que dans les cas où une fonction n'est pas définie, on convienne plus ou moins arbitrairement de la valeur qu'on lui accordera. Si Paul a plusieurs soeurs, 'la soeur de Paul' est généralement compris comme la soeur dont on parle. 'La main gauche de la main gauche de Paul' peut être compris comme étant la main gauche de Paul ou n'importe quel objet arbitrairement choisi. Quand on parle de la capitale de X, on sous-entendra tout à fait artificiellement, par exemple, qu'il s'agit de la capitale de X, si X a une capitale ou de X sinon.

Nous verrons plus loin qu'on peut, mais en allongeant sensiblement les expressions, se passer complètement des symboles fonctionnels.

Leçon 11. Paul aime sa femme, moi aussi

Vocabulaire

$\boldsymbol{a}$	Paul	$\boldsymbol{q}$	Il fait beau.	$\boldsymbol{r}^{\mathbf{1}}$	homme
$\boldsymbol{b}$	Sophie	$\boldsymbol{r}$	Paul court dans la forêt.	$\boldsymbol{r}^{\mathbf{2}}$	aimant
$\boldsymbol{c}$	moi	$\boldsymbol{p}^{\mathbf{1}}$	russe	$\boldsymbol{s}^{\mathbf{2}}$	marié à
$\boldsymbol{p}$	Il pleut.	$\boldsymbol{q}^{\mathbf{1}}$	belge	$\boldsymbol{p}^{\mathbf{2}}$	ayant droit à

Version

1. $\neg\neg \boldsymbol{p} \leftrightarrow \boldsymbol{p}$	Il n'est pas vrai qu'il ne pleut pas ssi il pleut.
2. $\boldsymbol{r} \rightarrow (\boldsymbol{q} \rightarrow \boldsymbol{r})$	Si Paul court dans la forêt, alors s'il fait beau, Paul court dans la forêt.
3. $(\neg \boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{p}) \rightarrow \boldsymbol{p}$	Si même quand il ne pleut pas, il pleut, alors il pleut.
4. $((\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}) \rightarrow \boldsymbol{p}) \rightarrow \boldsymbol{p}$	Supposons que le fait qu'il pleuve puisse se déduire de ce qu'il fait beau est nécessaire pour qu'il pleuve, alors il pleut.
5. $(\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}) \vee \boldsymbol{p}$	S'il pleut il fait beau, ou alors il pleut.
6. $(\boldsymbol{p} \rightarrow (\boldsymbol{q} \rightarrow \boldsymbol{r})) \leftrightarrow ((\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}) \rightarrow (\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{r}))$	Dire qu'il pleut implique que s'il fait beau, Paul court dans la forêt, cela revient à dire que s'il fait beau lorsqu'il pleut, alors Paul court dans la forêt, s'il pleut.
7. $(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}) \leftrightarrow \neg(\neg \boldsymbol{p} \vee \neg \boldsymbol{q})$	Il pleut et il fait beau ssi il n'est pas vrai qu'il ne pleut pas ou qu'il ne fait pas beau.
8. $(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \leftrightarrow \neg(\neg \boldsymbol{p} \wedge \neg \boldsymbol{q})$	Il pleut ou il fait beau ssi il n'est pas vrai qu'il ne pleut pas et il ne fait pas beau.
9. $((\boldsymbol{q} \rightarrow \boldsymbol{r}) \wedge \boldsymbol{q}) \leftrightarrow (\boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{r})$	S'il fait beau, alors Paul court dans la forêt, et il fait beau ssi il fait beau et Paul court dans la forêt.
10. $(\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}) \leftrightarrow (\neg \boldsymbol{q} \rightarrow \neg \boldsymbol{p})$	Il pleut implique qu'il fait beau ssi il ne fait pas beau implique qu'il ne pleut pas.

Explications

Les exemples donnés dans la version sont des **tautologies**, c'est-à-dire des lois logiques qui ne tiennent pas compte des quantificateurs et de l'égalité.

En français, « A et B » peut signifier que « A » et « B » sont simultanément vrais, auquel cas 'et' est un foncteur de vérité : 'Il pleut et il fait froid' équivaut à 'Il fait froid et il pleut'. Mais 'et' peut aussi signifier « et puis », qui n'est pas un foncteur de vérité : 'Il créa le monde et il se reposa' n'équivaut pas à 'Il se reposa et il créa le monde'.

D'autres expressions peuvent remplir le rôle de ce foncteur de vérité, citons 'mais', 'quoique', 'bien que', 'par contre', 'en revanche' : 'il fait froid, mais il fait beau', 'il fait beau quoiqu'il pleuve'.

Des expressions comme « A ou B », « A, sauf si B », « A, si non B » traduisent souvent des disjonctions.

Il y a au moins trois foncteurs de vérité qui se rendent par le mot 'ou', le « ou » exclusif, qui signifie « ou bien...ou bien... » — 'je vivrai sans reproche ou périrai sans honte', 'publish or perish' (jeu de mots anglais signifiant 'je publierai sans vergogne ou périrai sans honte') — le « ou » inclusif, le préféré des logiciens, qui signifie « et/ou », — Bob roulait trop vite ou il s'est endormi au volant — et le 'ou' d'incompatibilité, qui équivaut à « pas à la fois » — 'boire ou conduire, il faut choisir'. Si on affirme « A ou B », c'est en général parce qu'on ignore lequel des énoncés de « A » ou de « B » est vrai et si on pose la question « A ou B » on espère comme réponse « A » ou « B ». Mais la logique est indifférente à ces conventions du savoir-vivre langagier : le logicien pourra déclarer avec aplomb « Paris est en France ou je viendrai à quatre heures » ou répondre sans rire 'oui' à la question 'viendrez-vous le matin ou l'après-midi ?'.

Thème

1. Paul est marié à Sophie.	$\boldsymbol{sab}$
2. Paul et Sophie sont mariés.	▲ $\boldsymbol{sab \wedge sba}$ ▲ $\boldsymbol{sab}$ ▲ $\boldsymbol{sba}$ ▲ $\boldsymbol{\exists x\, sax \wedge \exists x\, sbx}$
3. Paul ou Sophie est marié.	$\boldsymbol{\exists x\, (sax \vee sbx)}$
4. Paul est russe et belge.	$\boldsymbol{pa \wedge qa}$
5. Quelque homme est russe et belge.	$\boldsymbol{\exists x\, (rx \wedge px \wedge qx)}$
6. Quelque homme est russe et quelque homme est belge.	$\boldsymbol{\exists x\, (rx \wedge px) \wedge \exists x\, (rx \wedge qx)}$
7. Paul aime sa femme et moi aussi.	▲ $\boldsymbol{\exists x\, (sax \wedge rax) \wedge \exists y\, (scy \wedge rcy)}$ ▲ $\boldsymbol{\exists x\, (sax \wedge rax \wedge rcx)}$ ▲ $\boldsymbol{\exists x\, (syx \wedge rax \wedge rcx)}$ ▲ $\boldsymbol{\exists x\, (sax \wedge rax \wedge rac)}$
8. Serait-il Dieu possible que Paul aimât Sophie?	$\boldsymbol{\neg r^2ab}$
9. Paul est l'égal de Sophie.	▲ $\boldsymbol{\forall x\, (pax \leftrightarrow pbx)}$ ▲ $\boldsymbol{a = b}$
10. Tous les hommes sont égaux.	▲ $\boldsymbol{\forall x \forall y\, ((rx \wedge ry) \rightarrow \forall z\, (pxz \leftrightarrow pyz))}$ ▲ $\boldsymbol{\forall x \forall y\, ((rx \wedge ry) \rightarrow x = y)}$

Remarques

Parfois la conjonction ou la disjonction se marque sur une partie de l'énoncé. Elle se ramène alors à la conjonction de deux énoncés ou plus. 'Paris est grande et belle' équivaut à 'Paris est grande et Paris est belle'. 'Paris est grande ou belle' équivaut à 'Paris est grande ou Paris est belle'. 'Paris et Bruxelles sont des capitales' équivaut à 'Paris est une capitale et Bruxelles est une capitale.' 'Paris ou Bruxelles est une capitale' équivaut à 'Paris est une capitale ou Bruxelles est une capitale.' Enfin, 'Rome et Paris sont et resteront grandes et belles' équivaut à 'Rome est grande et Rome est belle et Rome restera grande et Rome restera belle et Paris est grande et Paris est belle et Paris restera grande et Paris restera belle'.

Mais alors que 'quelque ville est grande ou belle' équivaut à 'quelque ville est grande ou quelque ville est belle', 'quelque ville est grande et belle' n'équivaut pas à 'quelque ville est grande et quelque ville est belle'. 'Le fils de Joseph et de Marie est parti en voyage' n'équivaut pas à 'le fils de Joseph est parti en voyage et le fils de Marie est parti en voyage'. 'Joseph est le mari de Marie et il est charpentier' ne dit pas la même chose que 'Il est charpentier et Joseph est le mari de Marie'. 'Les manifestants étaient tous belges et portugais' signifie autre chose que 'Les manifestants étaient tous belges et les manifestants étaient tous portugais.'

Quoique l'implicateur ne traduise pas souvent exactement un connecteur du français, il peut néanmoins se rendre, dans certains contextes, par des locutions comme « A implique B », « si A, alors B », « si A, B », « A seulement si B », « A est suffisant pour que B », « A est une condition suffisante pour que B », « B, si A », « B, dès que A », « B, pourvu que A », « B est une condition nécessaire pour que A », « B, à moins que non A ».

Parfois le si...alors... ressemble davantage à un conjoncteur qu'à un implicateur. 'Mon père est l'offensé, si l'offenseur est père de Chimène' s'interprète à première vue comme une implication entre 'l'offenseur est père de Chimène' et 'mon père est l'offensé'. Mais si on sous-entend que 'mon père est l'offensé' est vrai, la phrase a la forme $(A \to B) \wedge A$ et elle équivaut à $A \wedge B$.

Quand le conséquent d'une implication est manifestement faux, l'implication est une façon particulière de nier l'antécédent : 'si vous êtes le professeur Tournesol, moi je suis la reine d'Angleterre', revient logiquement à 'vous n'êtes pas le professeur Tournesol'.

Quand l'antécédent est manifestement vrai, l'implication renforce l'affirmation du conséquent : 'quoiqu'il en soit, il est temps d'en finir' confirme avec une force non logique qu'il est temps d'en finir.

Leçon 12. Sophie a plus d'un amant

Vocabulaire

$\boldsymbol{a}$ Sophie $\boldsymbol{p}^1$ russe $\boldsymbol{q}^1$ slave $\boldsymbol{r}^2$ aimant

Version

1. $(\forall \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{px} \vee \forall \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{qx}) \rightarrow \forall \boldsymbol{x}\, (\boldsymbol{px} \vee \boldsymbol{qx})$	Si tout est russe ou tout est slave, tout est russe ou slave.
2. $\exists \boldsymbol{x}\, (\boldsymbol{px} \wedge \boldsymbol{qx}) \rightarrow (\exists \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{px} \wedge \exists \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{qx})$	Si quelque chose est russe et slave, quelque chose est russe et quelque chose est slave.
3. $(\forall \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{px} \wedge \forall \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{qx}) \leftrightarrow \forall \boldsymbol{x}\, (\boldsymbol{px} \wedge \boldsymbol{qx})$	Tout est russe et tout est slave ssi tout est russe et slave.
4. $\exists \boldsymbol{x}\, (\boldsymbol{px} \vee \boldsymbol{qx}) \leftrightarrow (\exists \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{px} \vee \exists \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{qx})$	Quelque chose est russe ou slave ssi il y a un russe ou il y a un slave.
5. $\forall \boldsymbol{x}\, (\boldsymbol{px} \vee \boldsymbol{qa}) \leftrightarrow (\forall \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{px} \vee \boldsymbol{qa})$	Tout est tel qu'il est russe ou Sophie est slave ssi tout est russe ou Sophie est slave.
6. $(\forall \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{px} \rightarrow \forall \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{qx}) \leftrightarrow \forall \boldsymbol{x}\, (\forall \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{px} \rightarrow \boldsymbol{qx})$	Tout est russe implique tout est slave ssi pour toute chose le fait que tout soit russe implique qu'elle est slave.
7. $(\forall \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{px} \rightarrow \forall \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{qx}) \leftrightarrow \exists \boldsymbol{x}\, (\boldsymbol{px} \rightarrow \forall \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{qx})$	Tout est russe implique tout est slave ssi pour une certaine chose, le fait qu'elle soit russe implique que tout est slave.
8. $\exists \boldsymbol{x}\, (\boldsymbol{qx} \rightarrow \forall \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{qx})$	Il y a quelqu'un de si singulier qu'il suffit qu'il soit slave pour que tout le monde le soit.
9. $(\forall \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{px} \rightarrow \forall \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{qx}) \leftrightarrow \exists \boldsymbol{x} \forall \boldsymbol{y}\, (\boldsymbol{px} \rightarrow \boldsymbol{qy})$	Si tout est russe implique que tout est slave, alors il y a une chose telle que tout est slave si elle est russe, et réciproquement.
10. $\forall \boldsymbol{x}\, ((\boldsymbol{px} \wedge \boldsymbol{rxa}) \rightarrow ((\boldsymbol{px} \wedge \neg \boldsymbol{qx}) \vee (\boldsymbol{qx} \wedge \boldsymbol{rxa})))$	Les Russes amoureux de Sophie sont tous des Russes qui ne sont pas slaves ou alors des slaves qui aiment Sophie.

Explications

Les énoncés de la version sont des lois logiques, ils sont vrais dans tous les modèles. Ces lois illustrent des principes généraux comme ceux-ci :

$\forall$ se **distribue** par rapport à $\wedge$ et $\exists$ par rapport à $\vee$: $\forall\alpha\,(A \wedge B) \leftrightarrow (\forall\alpha\, A \wedge \forall\alpha\, B)$, $\exists\alpha\,(A \vee B) \leftrightarrow (\exists\alpha\, A \vee \exists\alpha\, B)$.

En toute généralité, $\forall$ ne se distribue pas par rapport à $\vee$ ni $\exists$ par rapport à $\wedge$. Cependant, $(\forall\alpha\, A \vee \forall\alpha\, B) \rightarrow \forall\alpha\,(A \vee B)$ et $\exists\alpha\,(A \wedge B) \rightarrow (\exists\alpha\, A \wedge \exists\alpha\, B)$.

$\forall$ et $\exists$ peuvent s'**exporter** dans les cas suivants :

$\neg\forall\alpha\, A \leftrightarrow \exists\alpha\,\neg A$,
$\neg\exists\alpha\, A \leftrightarrow \forall\alpha\,\neg A$;

$(A \diamondsuit \forall\alpha\, B) \leftrightarrow \forall\alpha\,(A \diamondsuit B)$,
$(A \diamondsuit \exists\alpha\, B) \leftrightarrow \exists\alpha\,(A \diamondsuit B)$,
si α n'est pas libre dans A, $\diamondsuit$ est mis pour $\wedge$, $\vee$ ou $\rightarrow$;

$(\forall\alpha\, A \heartsuit B) \leftrightarrow \forall\alpha\,(A \heartsuit B)$,
$(\exists\alpha\, A \heartsuit B) \leftrightarrow \exists\alpha\,(A \heartsuit B)$,
$(\forall\alpha\, A \rightarrow B) \leftrightarrow \exists\alpha\,(A \rightarrow B)$,
$(\exists\alpha\, A \rightarrow B) \leftrightarrow \forall\alpha\,(A \rightarrow B)$,
si α n'est pas libre dans B, $\heartsuit$ est mis pour $\wedge$, $\vee$.

Thème

1. Tout Russe aime un Russe.	$\boldsymbol{\forall x\,(px \rightarrow \exists y(py \wedge rxy))}$
2. Tout Russe aime un autre Russe.	$\boldsymbol{\forall x\,(px \rightarrow \exists y(\neg x = y \wedge py \wedge rxy))}$
3. Tout Russe aime un slave.	$\boldsymbol{\forall x\,(px \rightarrow \exists y(qy \wedge rxy))}$
4. Elle est russe et Sophie est slave.	$\boldsymbol{px \wedge qa}$
5. Sophie est slave et elle est russe.	▲ $\boldsymbol{qa \wedge pa}$ ▲ $\boldsymbol{qa \wedge px}$
6. Quelqu'un aime Sophie. ▲ Sophie a au moins un amant.	$\boldsymbol{\exists x\, rxa}$
7. Un Russe aime Sophie.	$\boldsymbol{\exists x\,(px \wedge rxa)}$
8. Deux personnes au moins aiment Sophie. ▲ Sophie a plus d'un amant.	$\boldsymbol{\exists x \exists y\,(\neg x = y \wedge rxa \wedge rya)}$
9. Si Sophie n'a pas d'amant, elle en a au plus un.	$\boldsymbol{\forall x\,\neg rxa \rightarrow \forall x \forall y\,((rxa \wedge rya) \rightarrow x = y)}$
10. Sophie a exactement deux amants.	$\boldsymbol{\exists x \exists y\,(\neg x = y \wedge rxa \wedge rya \wedge \forall z\,(rza \rightarrow (z = x \vee z = y)))}$

Remarques

C'est avec l'égalité qu'on traduit usuellement les expressions qui concernent le même et l'autre et les nombres naturels : un, deux, trois... 'Au moins trois cours sont obligatoires' s'analyse en 'il y a des cours X, Y et Z tels que X, Y, Z sont obligatoires et X n'est pas égal à Y et X n'est pas égal à Z et Y n'est pas égal à Z'. 'Trois cours au plus sont obligatoires' s'analyse en 'pour tous cours X, Y, Z, V, s'ils sont ogligatoires, alors X est égal à Y ou X est égal à Z ou X est égal à V ou Y est égal à Z ou Y est égal à V ou Z est égal à V'. 'Trois cours exactement sont obligatoires' s'analyse en 'trois cours au moins sont obligatoires et trois cours au plus sont obligatoires'.

Leçon 13. L'amant de Sophie est chauve

Vocabulaire

$\boldsymbol{a}$	Sophie	$\boldsymbol{p^1}$	russe	$\boldsymbol{f^1}$	le seul ou la seule qui aime
		$\boldsymbol{q^1}$	chauve	$\boldsymbol{r^2}$	aimant

Version

1. $\boldsymbol{\exists x\, rxa}$	Sophie a au moins un amant.
2. $\boldsymbol{\exists x^p rxa}$	Un des amants de Sophie est russe
3. $\boldsymbol{\forall x\, \forall y\, ((rxa \wedge rya) \rightarrow x = y)}$	Sophie a au plus un amant.
4. $\boldsymbol{\exists x\, rxa \wedge \forall x \forall y\, ((rxa \wedge rya) \rightarrow x = y)}$	Sophie a exactement un amant.
5. $\boldsymbol{\forall x\, (rxa \rightarrow qx)}$	Tout amant de Sophie est chauve
6. $\boldsymbol{q^1 f^1 a}$	L'amant de Sophie est chauve.
7. $\boldsymbol{\exists x\, rxa \wedge \forall x \forall y\, ((rxa \wedge rya) \rightarrow x = y) \wedge \forall x\, (rxa \rightarrow qx)}$	L'amant de Sophie est chauve.
8. $\boldsymbol{\exists x\, (\forall y\, (rya \leftrightarrow x = y) \wedge qx)}$	L'amant de Sophie est chauve.
9. $\boldsymbol{\neg(\exists x\, rxa \wedge \forall x \forall y\, ((rxa \wedge rya) \rightarrow x = y)) \wedge \exists x\, rxa}$	▲ *L*'amant de Sophie n'existe pas, quoiqu'elle ait un amant. ▲ Sophie a plus d'un amant.
10. $\boldsymbol{\exists x^p\, rxa \wedge \forall x^p \forall y^p\, ((rxa \wedge rxa) \rightarrow x = y)}$	L'amant russe de Sophie existe.

Explications

Pour abréger les écritures et rendre les formules plus intelligibles, on peut écrire $\forall \alpha^P A$ au lieu de $\forall \alpha\, (P\alpha \rightarrow A)$, et $\exists \alpha^P A$ au lieu de $\exists \alpha\, (P\alpha \wedge A)$, lorsque P est un symbole prédicatif unaire. $\forall \alpha^P A$ signifie donc que tous les P satisfont A et $\exists \alpha^P A$, qu'il y a un P qui satisfait A.

$\forall x^p \forall y^q\, rxy$ abrège donc $\forall x\, (px \rightarrow \forall y\, (qy \rightarrow rxy))$, qui équivaut, par exportation, à $\forall x \forall y\, ((px \wedge qy) \rightarrow rxy)$.
$\exists x^p \exists y^q\, rxy$ abrège $\exists x\, (px \wedge \exists y\, (qy \wedge rxy))$, qui équivaut à $\exists x \exists y\, (px \wedge qy \wedge rxy)$.
$\forall x^p \exists y^q\, rxy$ abrège $\forall x\, (px \rightarrow \exists y\, (qy \wedge rxy))$, qui équivaut à $\forall x \exists y\, (px \rightarrow (qy \wedge rxy))$.
$\exists y^q \forall x^p\, rxy$ abrège $\exists y\, (qy \wedge \forall x\, (px \rightarrow rxy))$, qui équivaut à $\exists y \forall x\, (qy \wedge (px \rightarrow rxy))$.

Thème

1. Il y a des philosophes russes.	▲ $\exists x\,(px \wedge rxa)$ ▲ $\exists x^p\, rxa$
2. L'amant de Sophie est son seul amant.	▲ $\forall x\,(x = f^1a \leftrightarrow rxa)$ ▲ $\forall x \forall y\,((rxa \wedge rya) \rightarrow (x = f^1a \wedge y = f^1a)) \wedge rf^1aa$
3. En fait de philosophes, il n'y a pas que les Russes qui soient chauves	▲ $\forall x\,((px \wedge rxa) \rightarrow qx) \wedge \neg\forall x\,((qx \wedge rxa) \rightarrow px)$ ▲ $\forall x^p\,(rxa \rightarrow qx) \wedge \neg\forall x^q\,(rxa \rightarrow px)$
4. L'amant de Sophie n'est pas chauve.	▲ $\neg q^1 f^1 a$ ▲ $\exists x\, rxa \wedge \forall x \forall y\,((rxa \wedge rya) \rightarrow x = y) \wedge \forall x\,(rxa \rightarrow \neg qx)$ ▲ $\exists x\,(rxa \wedge \forall y\,(rya \rightarrow y = x) \wedge \neg qx)$ ▲ $\exists x(\forall y\,(rya \leftrightarrow x = y) \wedge \neg qx)$
5. Il n'est pas exact que l'amant de Sophie soit chauve.	▲ $\neg(\exists x\, rxa \wedge \forall x \forall y\,((rxa \wedge rya) \rightarrow x = y) \wedge \forall x\,(rxa \rightarrow qx))$ ▲ $\neg\exists x\,(\forall y\,(rya \leftrightarrow x = y) \wedge qx)$
6. L'amant de Sophie est l'amant de Sophie.	▲ $fa = fa$ ▲ $\exists x\, rxa \wedge \forall x \forall y\,((rxa \wedge rya) \rightarrow x = y) \wedge \forall x\,(rxa \rightarrow x = fa)$ ▲ $\exists x(\forall y\,(rya \leftrightarrow x = y) \wedge x = fa)$
7. L'amant russe de Sophie n'est pas son amant chauve.	▲ $\exists x \exists y\,(px \wedge rxa \wedge \forall z\,((rza \wedge pz) \rightarrow x = z) \wedge qy \wedge rya \wedge \forall z\,((rza \wedge qz) \rightarrow y = z) \wedge \neg x = y)$ ▲ $\exists x^p \exists y^q\,(rxa \wedge \forall z^p\,(rza \rightarrow x = z) \wedge rya \wedge \forall z^q\,(rza \rightarrow y = z) \wedge \neg x = y)$
8. L'amant du chauve n'est pas russe.	▲ $\exists x\,(qx \wedge \neg pf^1x) \wedge \forall x \forall y\,((qx \wedge qy) \rightarrow x = y)$ ▲ $\exists x^q\, \neg pf^1x \wedge \forall x^q \forall y^q\, x = y$ ▲ $\exists x\,(qx \wedge \forall x \forall y\,((qx \wedge qy) \rightarrow x = y) \wedge \exists y\,(ryx \wedge \forall x_1 \forall y_1\,((rx_1x \wedge ry_1x) \rightarrow x_1 = y_1) \wedge \neg py)$ ▲ $\exists x^q(\forall x^q \forall y^q\, x = y \wedge \exists y\,(ryx \wedge \forall x_1 \forall y_1\,((rx_1x \wedge ry_1x) \rightarrow x_1 = y_1) \wedge \neg py)$

9. Les deux philosophes sont chauves.

▲ $\exists x \exists y\,(\neg x = y \wedge rxa \wedge rya \wedge \forall x \forall y \forall z\,((rxa \wedge rya) \rightarrow (x = y \vee x = z)) \wedge \forall x\,(rxa \rightarrow qx))$

▲ $\exists x \exists y\,(\neg x = y \wedge rxa \wedge rya \wedge \forall z\,(rza \leftrightarrow z = x \vee z = y) \wedge qx \wedge qy)$

10. S'il n'y a qu'un philosophe russe et que deux philosophes chauves, il y a au moins trois philosophes.

$\exists x^p\,(rxa \wedge \forall z^p(rza \rightarrow z = x)) \wedge \exists x^q \exists y^q\,(rxa \wedge rya \wedge \forall z\,(rza \rightarrow (z = x \vee z = y)) \rightarrow \exists x^p \exists y^p \exists z^p\,(rxa \wedge rya \wedge ryz \wedge \neg x = y \wedge \neg x = z \wedge \neg y = z))$

Remarques

Les expressions du type 'le doyen de la faculté' sont appelées des descriptions définies, les expressions comme 'un doyen de la faculté' sont des descriptions indéfinies. Les phrases comprenant des descriptions définies sont susceptibles d'interprétations diverses. Soit l'expression est représentée par une constante, soit par un terme contenant un symbole fonctionnel, soit l'expression n'est pas traduite mais bien la phrase comprenant cette expression.

C'est cette dernière interprétation — *la théorie des descriptions de Russell* — qui est la plus originale. 'Le doyen de la faculté n'a plus vingt ans' est équivalent à la conjonction des trois phrases : 'il y a au moins un doyen de la faculté', 'il y a au plus un doyen de la faculté' et 'tout doyen de la faculté a plus de vingt ans'.

Est-il utile de rappeler que 'Sophie', qui n'est pas un mot grec, veut dire « sagesse » en grec et qu'un philosophe est, étymologiquement du moins, un amant de la sagesse ?

Leçon 14. L'addition est associative

Vocabulaire

$\boldsymbol{a}$	Paul	$\boldsymbol{p^2}$	aimant	$\boldsymbol{g^2}$	la somme de...et de...
$\boldsymbol{b}$	Sophie	$\boldsymbol{q^2}$	voisin de	$\boldsymbol{f^2}$	le produit de...et de...
$\boldsymbol{p^1}$	nombre naturel				

Notations

$\boldsymbol{(\alpha + \beta)}$	$f^2\alpha\beta$	$\boldsymbol{(\alpha \times \beta)}$	$g^2\alpha\beta$	$\boldsymbol{\alpha\ Div\ \beta}$	$\exists x_5^p\,(g^2 x_5 \alpha = \beta)$

Version

1. $\boldsymbol{pab \land \neg pba}$	▲Paul aime Sophie et Sophie n'aime pas Paul. ▲L'amour de Paul pour Sophie n'est pas réciproque.
2. $\boldsymbol{\neg\exists x \exists y\,(pxy \land pyx)}$	L'amour n'est jamais réciproque.
3. $\boldsymbol{\neg\forall x \forall y\,(pxy \to pyx)}$	L'amour n'est pas toujours réciproque.
4. $\boldsymbol{\neg\forall x \forall y\, pxy}$	L'amour n'est pas universel.
5. $\boldsymbol{\forall x \forall y\,((px \land py) \to fxy = fyx)}$ ▲$\boldsymbol{\forall x^p \forall y^p\,((x+y) = (y+x))}$	▲Si n et m sont des nombres, alors $n + m = m + n$. ▲L'addition est une opération commutative.
6. $\boldsymbol{\forall x \forall y \forall z\,((px \land py \land pz) \to ffxyz = fxfyz)}$ ▲$\boldsymbol{\forall x^p \forall y^p \forall z^p\,((x+y)+z) = (x+(y+z))}$	L'addition est une opération associative, c'est-à-dire que $((n + m) + k) = (m + (n + k))$.
7. $\boldsymbol{\forall x \forall y\,((px \land py) \to g^2 f^2 xy f^2 xy = f^2 f^2 g^2 xx g^2 yy f^2 g^2 xy g^2 xy)}$ ▲$\boldsymbol{\forall x^p \forall y^p\,((x+y) \times (x+y)) = ((x\times x)+(y\times y))+((x\times y)+(x\times y))}$	Le carré d'une somme de deux nombres est la somme des carrés de ces nombres augmentée du double de leur produit.
8. $\boldsymbol{\forall x\, \forall y\,(qxy \to qyx)}$	La relation de voisinage est symétrique.
9. $\boldsymbol{\neg\forall x \forall y \forall z\,((qxy \land qyz) \to qxz)}$ ▲$\boldsymbol{\neg\forall x \forall y \forall z\,(qxy \to (qyz \to qxz))}$ ▲$\boldsymbol{\exists x \exists y \exists z\,(qxy \land qyz \land \neg qxz)}$	La relation de voisinage n'est pas transitive.

10. $\forall \boldsymbol{x} \forall \boldsymbol{y} \forall \boldsymbol{z}\,((\boldsymbol{qxy} \rightarrow \boldsymbol{qyx}) \wedge ((\boldsymbol{qxy} \wedge \boldsymbol{qyz}) \rightarrow \boldsymbol{qxz}))$	La relation de voisinage est symétrique et transitive.

Explications

> *...une bonne notation est si subtile et si suggestive qu'elle en devient parfois semblable à un professeur en chair et en os. Des irrégularités dans la notation sont souvent le signe avant-coureur d'erreurs philosophiques et une notation parfaite serait un substitut de la pensée.*
> (B. Russell, Introduction au Tractatus de Wittgenstein, p. 17–18.)

L'égalité, symbole logique, n'est pas antéposé comme les autres symboles prédicatifs binaires. On a conservé la notation courante, '=', qui est plus suggestive et rend donc les formules plus intelligibles.

On peut noter d'autres symboles prédicatifs ou fonctionnels d'une manière plus évocatrice que p^n, q^n, f^n etc. Il est plus naturel d'écrire $x+y$ ou $x \times y$ que f^2xy ou g^2xy. Cependant, $x+y \times z$ est ambigu, alors que f^2xg^2yz et g^2f^2xyz ne le sont pas. C'est pourquoi il faut parfois écrire $(x+y)$ ou $(x \times y)$ au lieu de $x+y$ ou $x \times y$.

Les loglangues sont indifférentes au choix des notations, quoique les loglangophones attachent beaucoup d'importance à ce qu'ils appellent la « bonne notation ».

Thème

1. L'égalité est réflexive.	$\forall \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$
2. L'égalité est transitive.	▲ $\forall \boldsymbol{x} \forall \boldsymbol{y} \forall \boldsymbol{z}\,((\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}) \rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{z})$ ▲ $\forall \boldsymbol{x} \forall \boldsymbol{y} \forall \boldsymbol{z}\,(\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \rightarrow (\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z} \rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}))$
3. L'égalité est symétrique.	▲ $\forall \boldsymbol{x} \forall \boldsymbol{y}\,(\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \rightarrow \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x})$ ▲ $\forall \boldsymbol{x} \forall \boldsymbol{y}\,(\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \leftrightarrow \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x})$
4. L'égalité est une équivalence.	$\forall \boldsymbol{x} \forall \boldsymbol{y} \forall \boldsymbol{z}\,(\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \wedge (\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \rightarrow \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}) \wedge ((\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}) \rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}))$
5. La fonction « élever au carré » est injective.	▲ $\forall \boldsymbol{x} \forall \boldsymbol{y}\,((\boldsymbol{px} \wedge \boldsymbol{py} \wedge \boldsymbol{gxx} = \boldsymbol{gyy}) \rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y})$ ▲ $\forall \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{p}} \forall \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{p}}\,(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \times \boldsymbol{y} \rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y})$
6. La fonction « élever au carré » n'est pas surjective sur les naturels: il y a un nombre naturel qui n'est pas un carré parfait.	▲ $\exists \boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{px} \wedge \forall \boldsymbol{y}\,(\boldsymbol{py} \rightarrow \neg \boldsymbol{x} = \boldsymbol{gyy}))$ ▲ $\exists \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{p}} \forall \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{p}}\, \neg \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \times \boldsymbol{y}$

7. Ce nombre-ci est une racine carrée de ce nombre-là.	▲ $\boldsymbol{gxx = y}$ ▲ $\boldsymbol{x \times x = y}$
8. Ce nombre a au plus deux diviseurs.	$\boldsymbol{\forall z_1^p \forall z_2^p \forall z_3^p\, ((z_1\ Div\ x \wedge z_2\ Div\ x \wedge z_3\ Div\ x) \rightarrow (z_1 = z_2 \vee z_1 = z_3 \vee z_2 = z_3))}$
9. Ce nombre a au moins deux diviseurs.	$\boldsymbol{\exists z_1^p \exists z_2^p\, (z_1\ Div\ x \wedge z_2\ Div\ x \wedge \neg z_1 = z_2)}$
10. Ce nombre est un nombre premier, c'est-à-dire qu'il est différent de 1 et n'est divisible que par lui-même et par 1.	▲ $\boldsymbol{\forall y^p\, (\forall z_1^p\, (z_1\ Div\ y \rightarrow z_1 = y) \rightarrow (\neg x = y \wedge \forall z_1^p\, (z_1\ Div\ x \rightarrow (z_1 = x \vee z_1 = y))))}$ ▲ $\boldsymbol{\forall z_1^p \forall z_2^p \forall z_3^p\, ((z_1\ Div\ x \wedge z_2\ Div\ x \wedge z_3\ Div\ x) \rightarrow (z_1 = z_2 \vee z_1 = z_3 \vee z_2 = z_3)) \wedge \exists z_1^p \exists z_2^p\, (z_1\ Div\ x \wedge z_2\ Div\ x \wedge \neg z_1 = z_2)}$ ▲ $\boldsymbol{\forall z_1^p \forall z_2^p\, (x = z_1 \times z_2 \rightarrow \neg(x = z_1 \leftrightarrow x = z_2))}$

Remarques

Les formules peuvent être envisagées comme désignant des relations entre les valeurs de leurs variables libres, de sorte qu'une formule peut être abrégée comme si elle n'était qu'une formule de base. $x\ Div\ y$, qui peut se lire 'x divise y', abrège $\exists x_5^p\, (g^2 x_5 x = y)$, qui elle-même abrège déjà $\exists x_5\, (px_5 \wedge g^2 x_5 x = y)$. Remarquons que $\exists x_5\, (px_5 \wedge g^2 x_5 x = y)$ équivaut à $\exists x_6\, (px_6 \wedge g^2 x_6 x = y)$, mais pas à $\exists x\, (px \wedge g^2 xx = y)$. Nous avons affaire ici à un conflit entre variables libres et liées. Les loglangophones appliquent spontanément les règles, fastidieuses à formuler, qui permettent d'éviter ces confusions.

Nous allons exposer maintenant quelques propriétés des fonctions et relations fréquemment invoquées.

Une fonction *injective* est telle qu'à des objets distincts elle associe des valeurs distinctes.

Une fonction est *surjective* sur un ensemble, si tout élément de l'ensemble est une valeur de la fonction.

La réflexivité, la symétrie, la transitivité, sont des propriétés de relations que nous avons déjà rencontrées et définies.

Une *équivalence* est une relation réflexive, symétrique et transitive.

Une relation *fonctionnelle* R est une relation telle que si $\alpha R \beta$ et $\alpha R \gamma$, alors β est identique à γ. Une fonction unaire est donc assimilable à une relation fonctionnelle

R qui vérifie en outre la propriété suivante : pour tout objet α de l'univers il y au moins un objet β tel que $\alpha R \beta$.

Les fonctions que nous considérons dans ce cours associent à tout objet de l'univers de référence un objet de ce même univers. Nous avons déjà indiqué que de telles fonctions n'apparaissent que rarement dans les interprétations des expressions courantes. Il eût été plus commode, pour interpréter l'expression 'la main gauche de' de distinguer un domaine de définition, dans ce cas un ensemble d'hommes, et un codomaine, dans ce cas, un ensemble de mains, plutôt que d'introduire une valeur arbitraire quand la fonction n'est pas naturellement définie. Cette méthode, pratiquée dans des loglangues évoluées, aurait ici compliqué inutilement le lexique et la syntaxe. En réalité, comme on l'a déjà pressenti, les relations fonctionnelles permettent d'éviter ces complications : l'expression fonctionnelle 'la main gauche de' peut être remplacée par une relation fonctionnelle : 'a...pour main gauche'.

Leçon 15. Il a cessé de pleuvoir

Vocabulaire

$\boldsymbol{a}$	moi	$\boldsymbol{p}^1$	moment où il pleut	$\boldsymbol{r}^1$	moment du temps
$\boldsymbol{b}$	toi	$\boldsymbol{q}^1$	moment où il vente	$\boldsymbol{s}^2$	précédant dans le temps
$\boldsymbol{c}$	le moment présent	$\boldsymbol{p}_1^2$	sortant au moment		

Notation

$\boldsymbol{\alpha} \prec \boldsymbol{\beta}$ $\quad s^2\alpha\beta$

Version

1. $\boldsymbol{pc}$	Il pleut
2. $\forall \boldsymbol{x}^r\,(\boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{c} \lor \boldsymbol{x} = \boldsymbol{c} \lor \boldsymbol{c} \prec \boldsymbol{x})$ $\blacktriangle \forall \boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{rx} \longrightarrow (\boldsymbol{sxc} \lor \boldsymbol{x} = \boldsymbol{c} \lor \boldsymbol{scx}))$	Tout moment du temps est passé, présent ou futur.
3. $\forall \boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c} \longrightarrow (\neg \boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{c} \land \neg \boldsymbol{c} \prec \boldsymbol{x}))$ $\blacktriangle \forall \boldsymbol{x}\,((\boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{c} \lor \boldsymbol{c} \prec \boldsymbol{x}) \longrightarrow \neg \boldsymbol{x} = \boldsymbol{c})$ $\blacktriangle \neg \boldsymbol{c} \prec \boldsymbol{c}$	Le moment présent n'est ni passé, ni futur.
4. $\forall \boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{px} \longrightarrow \neg \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{ax})$	S'il pleut, je ne sors pas.
5. $\exists \boldsymbol{y}\,(\boldsymbol{y} \prec \boldsymbol{c} \land \boldsymbol{qy} \land \exists \boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{y} \prec \boldsymbol{x} \land \boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{c} \land \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{bx})$	Tu es sorti après un coup de vent.
6. $\neg \boldsymbol{pc} \land \exists \boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{c} \land \boldsymbol{px} \land \forall \boldsymbol{y}\,((\boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{y} \land \boldsymbol{y} \prec \boldsymbol{c}) \longrightarrow \boldsymbol{py}))$	Il a cessé de pleuvoir.
7. $\boldsymbol{pc} \land \exists \boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{c} \land \neg \boldsymbol{px}) \land \exists \boldsymbol{y}\,(\boldsymbol{y} \prec \boldsymbol{c} \land \boldsymbol{py} \land \forall \boldsymbol{z}\,((\boldsymbol{y} \prec \boldsymbol{z} \land \boldsymbol{z} \prec \boldsymbol{c}) \longrightarrow \neg \boldsymbol{pz}))$	Il recommence à pleuvoir.
8. $\boldsymbol{pc} \longrightarrow \forall \boldsymbol{y}\,(\boldsymbol{y} \prec \boldsymbol{c} \longrightarrow \exists \boldsymbol{z}\,(\boldsymbol{y} \prec \boldsymbol{z} \land \boldsymbol{pz}))$	S'il pleut, alors il a toujours été vrai qu'il pleuvrait.
9. $\boldsymbol{pc} \longrightarrow \forall \boldsymbol{y}\,(\boldsymbol{c} \prec \boldsymbol{y} \longrightarrow \exists \boldsymbol{z}\,(\boldsymbol{z} \prec \boldsymbol{y} \land \boldsymbol{pz}))$	S'il pleut, alors il sera toujours vrai qu'il a plu.
10. $\forall \boldsymbol{x} \forall \boldsymbol{y} \forall \boldsymbol{z}\,((\boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{y} \land \boldsymbol{y} \prec \boldsymbol{z}) \longrightarrow \boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{z})$	La succession temporelle est transitive.

Explications

Cette dernière leçon illustre à nouveau que les phrases peuvent se lire de façons diverses. Un énoncé comme 'il pleut' qui était inanalysé et qui paraissait jusqu'à présent inanalysable est maintenant analysé en 'le moment présent est pleuvant'.

Nous terminons avec quelques propriétés de relations.

Une relation R est asymétrique ssi pour deux objets distincts quelconques α et β, α n'est pas relié par R à β ou β ne l'est pas à α.

Une relation est irréflexive ssi elle ne relie aucun objet avec lui-même.

Un *ordre strict* est une relation irréflexive et transitive. Une telle relation est obligatoirement asymétrique.

Un *ordre* (non strict) est une relation réflexive, transitive et asymétrique.

R est dichotomique ssi pour deux objets distincts quelconques α et β, α est relié par R à β, ou β l'est à α.

Un ordre *linéaire*, strict ou non strict vérifie en outre la dichotomie.

Thème

1. Le présent succède au passé.	$\forall \boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{c} \rightarrow \boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{c})$
2. Ça n'a pas de sens de parler de précession temporelle entre d'autres choses que des moments du temps.	▲ $\forall \boldsymbol{x}\forall \boldsymbol{y}\,(\boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{y} \rightarrow (\boldsymbol{rx} \wedge \boldsymbol{ry}))$ ▲ $\forall \boldsymbol{x}\forall \boldsymbol{y}\,((\neg \boldsymbol{rx} \vee \neg \boldsymbol{ry}) \rightarrow \neg \boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{y})$
3. La succession temporelle est un ordre strict.	$\forall \boldsymbol{x}\forall \boldsymbol{y}\forall \boldsymbol{z}\,(\neg \boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{x} \wedge ((\boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{y} \prec \boldsymbol{z}) \rightarrow \boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{z}))$
4. Le temps s'écoule.	$\forall \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{r}}\forall \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{r}}\,(\boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{y} \vee \boldsymbol{y} \prec \boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y})$
5. Le temps est linéaire.	$\forall \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{r}}\forall \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{r}}\forall \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{r}}\,(\neg \boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{x} \wedge ((\boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{y} \prec \boldsymbol{z}) \rightarrow \boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{z}) \wedge (\boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{y} \vee \boldsymbol{y} \prec \boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}))$
6. Le futur succède au présent et au passé.	$\forall \boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{c} \prec \boldsymbol{x} \rightarrow (\boldsymbol{c} \prec \boldsymbol{x} \wedge \forall \boldsymbol{y}\,(\boldsymbol{y} \prec \boldsymbol{c} \rightarrow \boldsymbol{y} \prec \boldsymbol{x})))$
7. Quel temps! Quand il cesse de pleuvoir, il vente.	▲ $(\neg \boldsymbol{pc} \wedge \exists \boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{px} \wedge \forall \boldsymbol{y}\,((\boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{y} \prec \boldsymbol{c}) \rightarrow \boldsymbol{py}))) \rightarrow \boldsymbol{qc}$ ▲ $(\neg \boldsymbol{pc} \wedge \exists \boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{px} \wedge \forall \boldsymbol{y}\,((\boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{y} \prec \boldsymbol{c}) \rightarrow \boldsymbol{py}))) \wedge \boldsymbol{qc}$
8. Quoiqu'il ne pleuvra pas tout le temps, la pluie ne disparaîtra jamais.	$\exists \boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{c} \prec \boldsymbol{x} \wedge \neg \boldsymbol{px}) \wedge \forall \boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{c} \prec \boldsymbol{x} \rightarrow \exists \boldsymbol{y}\,(\boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{py}))$
9. Il y a toujours eu de la pluie.	▲ $\forall \boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{c} \rightarrow \exists \boldsymbol{y}\,(\boldsymbol{y} \prec \boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{py}))$ ▲ $\forall \boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{c} \rightarrow \boldsymbol{px})$
10. Il pleut pour la dernière fois. C'est promis.	$\boldsymbol{pc} \wedge \forall \boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{c} \prec \boldsymbol{x} \rightarrow \neg \boldsymbol{px})$

Appendice Grammatical

Alphabet

Les lettres de l'alphabet d'une loglangue comprennent

- une liste ouverte de symboles appartenant aux listes suivantes :
  - symboles propositionnels : p, q, r, s, p_1, q_1, r_1, s_1, p_2, $q_2, \ldots$ (pour chaque $n > 0$)
  - symboles prédicatifs n–aires : p^n, q^n, r^n, s^n, p_1^n, q_1^n, r_1^n, s_1^n, p_2^n, $q_2^n, \ldots$ (pour chaque $n > 0$)
  - symboles fonctionnels n–aires de la liste : f^n, g^n, h^n, f_1^n, g_1^n, h_1^n, f_2^n, $g_2^n, \ldots$ (pour chaque $n > 0$)
  - constantes : a, b, c, d, a_1, b_1, c_1, d_1, $a_2, \ldots$
- les listes fermées de symboles suivantes :
  - les variables : x, y, z, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, y_2, x_3, y_3, $z_3, \ldots$
  - les symboles logiques : $=$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\forall$ et $\exists$
  - les parenthèses : (et)

Syntaxe

Syntaxe du terme

- Toute variable ou constante est un terme.
- Une suite formée d'un symbole fonctionnel n–aire suivi de n termes est un terme.

Syntaxe de la formule

- Tout symbole propositionnel est une formule.
- Une suite constituée d'un symbole prédicatif n–aire suivi de n termes est une formule.
- Si t et u sont des termes, alors $t = u$ est une formule.
- Si A et B sont des formules, alors $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ et $(A \leftrightarrow B)$ sont des formules.
- Si A est une formule, et si α est une variable, alors $\forall \alpha A$ et $\exists \alpha A$ sont des formules.

Les notions de terme clos et d'énoncé

Un **terme clos** est un terme dans lequel ne figure aucune variable.

Une occurrence d'une variable α qui figure dans une formule de la forme $\forall \alpha A$ ou $\exists \alpha A$ est dite *quantifiée* ou **liée**. Elle est **libre** sinon.

Un **énoncé** est une formule dont toutes les occurrences de variables sont quantifiées.

Lectures

Qu'est-ce donc que la vertu, voilà ce qu'il faut examiner. Puisque les phénomènes de l'âme sont de trois sortes, les passions, les facultés et les dispositions, c'est l'une de ces choses qui doit être la vertu.… [$\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{r}$]

Or ni les vertus, ni les vices ne sont des passions parce que… [$\neg \boldsymbol{p}$]

…les vertus et les vices ne sont pas non plus des facultés… [$\neg \boldsymbol{q}$]

Si donc les vertus ne sont ni des passions, ni des facultés, il reste que ce sont des dispositions. [$\boldsymbol{r}$]
(Aristote, Éthique de Nicomaque, Livre II, v.)

Si les dieux existent et qu'ils ne fassent pas connaître aux hommes ce qui doit arriver, c'est ou bien qu'ils n'aiment pas les hommes, ou qu'ils pensent qu'il n'est d'aucun intérêt pour eux de savoir ce qui doit arriver, ou qu'ils ne pensent pas que cette connaissance soit compatible avec leur majesté, ou qu'ils ne peuvent même pas donner une telle connaissance. [$(\boldsymbol{p} \wedge \neg \boldsymbol{q}) \rightarrow (\neg \boldsymbol{r_1} \vee \neg \boldsymbol{r_2} \vee \neg \boldsymbol{r_3} \vee \neg \boldsymbol{r_4})$] Or il n'est pas vrai que les dieux ne nous aiment pas (en effet ils sont nos bienfaiteurs et nos amis), [$\neg\neg \boldsymbol{r_1}$] ils n'ignorent pas les choses qu'ils ont eux-mêmes décidées et arrêtées, [$\neg\neg \boldsymbol{r_4}$] il est faux que la connaissance de ce qui doit arriver ne nous soit d'aucun intérêt (en effet nous serons plus prudents si nous sommes informés), [$\neg\neg \boldsymbol{r_2}$] ils ne pensent pas que leur majesté (car rien n'est plus beau que la bienfaisance) leur interdise de nous faire connaître l'avenir, [$\neg\neg \boldsymbol{r_3}$] enfin ils ne peuvent pas ne pas connaître ce qui doit arriver. [$\neg\neg \boldsymbol{r_4}$] Il ne peut se faire que les dieux soient et ne nous communiquent pas l'avenir. [$\neg(\boldsymbol{p} \wedge \neg \boldsymbol{q}), \boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}$] Or les dieux sont, [$\boldsymbol{p}$] donc ils nous communiquent l'avenir. [$\boldsymbol{q}$]
(Cicéron, De la divination, I, 38)

Vocabulaire

$\boldsymbol{p}$ Figaro paie à la Damoiselle 2.000 piastres fortes.

$\boldsymbol{q}$ Figaro épouse la Damoiselle.

$\boldsymbol{a}$ le château

$\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{1}}$ lieu où Figaro paie à la Damoiselle 2.000 piastres fortes.

$\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{1}}$ lieu où Figaro épouse la Damoiselle.

Bartholo. *lit.* — *Je soussigné reconnais avoir reçu de Damoiselle etc… la somme de deux mille piastres fortes cordonnées ; laquelle somme je lui rendrai à sa réquisition, dans ce château ; et je l'épouserai…* [$\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$] …

Figaro. — …il n'est pas dit dans l'écrit : *laquelle somme je lui rendrai,* ET *je l'épouserai ;* mais *laquelle somme je lui rendrai,* OU *je l'épouserai ;* ce qui est bien différent. [$\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$]

Le Comte. — Y a-t-il ET dans l'acte ; ou bien OU ?

Bartholo. — Il y a ET.

Figaro. — Il y a OU. . . .

Double-Main. — . . . ET. . . OU. . . ET. . . OU. . . Le mot est si mal écrit. . . il y a un pâté. . . .

Bartholo. — Je soutiens, moi, que c'est la conjonction copulative ET qui lie les membres corrélatifs de la phrase ; je payerai la demoiselle, ET je l'épouserai. [$\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$]

Figaro. — Je soutiens, moi, que c'est la conjonction alternative, OU qui sépare lesdits membres ; je payerai la donzelle, OU je l'épouserai. . . [$\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$] . . .

Bartholo.— Pour. . . ne plus chicaner sur un mot, nous passons qu'il y ait OU. [$\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$] . . . examinons le titre en ce sens. *Laquelle somme je lui rendrai dans ce château où je l'épouserai.* C'est ainsi qu'on dirait, Messieurs : *vous vous ferez saigner dans ce lit* où *vous resterez chaudement* ; c'est « dans lequel ». *Il prendra deux grains de rhubarbe* où *vous mêlerez un peu de tamarin* ; dans lesquels on mêlera. Ainsi *château* où *je l'épouserai*, Messieurs, c'est *château dans lequel. . .* [$\boldsymbol{ra} \wedge \boldsymbol{sa}$]

Figaro. — Point du tout : la phrase est dans le sens de celle-ci : ou *la maladie vous tuera,* ou *ce sera le médecin* ; ou bien *le médecin*, c'est incontestable. Autre exemple : ou *vous n'écrirez rien qui plaise,* ou *les sots vous dénigreront* ; ou bien *les sots*, le sens est clair ; car, audit cas, *sots* ou *méchants*, sont le substantif qui gouverne. Maître Bartholo croit-il donc que j'aie oublié ma syntaxe ? Ainsi, je la payerai dans ce château, *virgule* ; ou je l'épouserai. . . [$\boldsymbol{ra} \vee \boldsymbol{q}$]

. . .

Le Comte. — Que peut requérir la demanderesse ? mariage à défaut de payement. . . [$\neg\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}$, autrement dit $\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$]

Que nous répond le défendeur ? qu'il veut garder sa personne ; à lui permis. [$\neg\boldsymbol{q}$]

Figaro. — J'ai gagné ! [$\neg\boldsymbol{p} \wedge \neg\boldsymbol{q}$]

. . .

Le Comte. — Mais comme le texte dit : *laquelle somme je payerai à la première réquisition, ou bien j'épouserai, etc,* la cour condamne le défendeur à payer deux mille piastres fortes, à la demanderesse ; ou bien à l'épouser dans le jour. [$\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$]

Figaro. J'ai perdu. [$\neg(\neg\boldsymbol{p} \wedge \neg\boldsymbol{q})$]
(Beaumarchais. Le mariage de Figaro, Acte III, Scène XV.)

Vocabulaire

$\boldsymbol{r^1}$ se repent de ce qu'il a fait

$\boldsymbol{s^2}$ misérable à cause de

$\boldsymbol{p^1}$ chose qui a été faite

$\boldsymbol{q^1}$ chose qui est faite maintenant

Théorème 54
Le repentir n'est pas une vertu, c'est-à-dire qu'il ne provient pas de la raison ; mais celui qui se repent de ce qu'il a fait est deux fois misérable ou impuissant. [$\forall \boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{rx} \longrightarrow \exists \boldsymbol{y} \exists \boldsymbol{z}\,(\neg \boldsymbol{y} = \boldsymbol{z} \wedge (\boldsymbol{sxy} \wedge \boldsymbol{sxz})))$]
Démonstration
Le premier point se démontre comme le théorème précédent. Le deuxième est trivial par la définition de ce sentiment [le repentir est une tristesse accompagnant l'idée d'une chose faite, que nous croyons avoir faite par une décision libre de l'esprit]. Car on est victime premièrement d'un désir mauvais [$\forall \boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{rx} \longrightarrow \exists \boldsymbol{y}\,(\boldsymbol{py} \wedge \boldsymbol{sxy}))$], et puis de la tristesse. [$\forall \boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{rx} \longrightarrow \exists \boldsymbol{y}\,(\boldsymbol{qy} \wedge \boldsymbol{sxy}))$; la prémisse implicite est : $\forall \boldsymbol{x} \forall \boldsymbol{y}\,((\boldsymbol{px} \wedge \boldsymbol{qy}) \longrightarrow \neg \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y})$]
(Spinoza, Éthique, IV)

Vocabulaire

$\boldsymbol{p^1}$ a moralement le droit de mentir

$\boldsymbol{q^1}$ capable de mentir

$\boldsymbol{r^1}$ fiable

$\boldsymbol{a}$ moi

Soit, par exemple, la question suivante : ne puis-je pas, si je suis dans l'embarras, faire une promesse avec l'intention de ne pas la tenir ?... [$\boldsymbol{pa}$]

...Après tout, en ce qui concerne la réponse à cette question, si une promesse trompeuse est conforme au devoir, le moyen de m'instruire le plus rapide, tout en étant infaillible, c'est de me demander à moi-même : accepterais-je bien avec satisfaction que ma maxime (de me tirer d'embarras par une fausse promesse) dût valoir comme une loi universelle (aussi bien pour moi que pour les autres) ? [$\boldsymbol{pa} \longrightarrow \forall \boldsymbol{x}\,\boldsymbol{px}$] Et pourrais-je bien me dire : tout homme peut faire une fausse promesse quand il se trouve dans l'embarras et qu'il n'a pas d'autre moyen d'en sortir ? [$\forall \boldsymbol{x}\,\boldsymbol{px}$] Je m'aperçois bientôt ainsi que si je peux bien vouloir le mensonge, je ne peux en aucune manière vouloir une loi universelle qui commanderait de mentir ; [$\boldsymbol{qa} \wedge \neg \forall \boldsymbol{x}\,\boldsymbol{px}$] en effet, selon une telle loi, il n'y aurait plus à proprement parler de promesse, [$\forall \boldsymbol{x}\,\boldsymbol{px} \longrightarrow \forall \boldsymbol{x}\,\neg \boldsymbol{qx}$] car il serait vain de déclarer ma volonté concernant mes actions futures à d'autres hommes qui ne croiraient point à cette déclaration

ou qui, s'ils y ajoutaient foi étourdiment, me payeraient exactement de la même monnaie [$\forall x\, px \rightarrow \forall x\, \neg rx$ et $\forall x\, \neg rx \rightarrow \forall x\, \neg qx$] : de telle sorte que ma maxime, du moment qu'elle serait érigée en loi universelle, se détruirait elle-même nécessairement [$(pa \rightarrow \forall x\, px) \rightarrow (pa \rightarrow \forall x\, \neg qx)$, soit : $pa \rightarrow (\forall x\, px \wedge \forall x\, \neg qx)$; les prémisses cachées sont notamment : $\forall x\, (px \rightarrow qx)$ et $\forall x\, (qx \rightarrow rx)$]....
(Kant, Fondements de la métaphysique des moeurs, Section 2.)